# Corrigé : X PC 2020

## Partie I.

**Question 1.** $(a\mathrm{A}+b\mathrm{B})^{\mathrm{T}} = a\mathrm{A}^{\mathrm{T}} + b\mathrm{B}^{\mathrm{T}} = a\mathrm{A}+b\mathrm{B}$ donc $a\mathrm{A}+b\mathrm{B}$ est symétrique, et pour tout $u \in \mathbb{R}^p$,

$$u^{\mathrm{T}}(a\mathrm{A}+b\mathrm{B})u = a(u^{\mathrm{T}}\mathrm{A}u) + b(u^{\mathrm{T}}\mathrm{B}u) \geqslant 0$$

donc $a\mathrm{A}+b\mathrm{B} \in \mathrm{Sym}^+(p)$.

**Question 2.** Pour tout $u \in \mathbb{R}^p$, $u^{\mathrm{T}}\mathrm{A}u = uvv^{\mathrm{T}}u^{\mathrm{T}} = (uv)(uv)^{\mathrm{T}} = \|uv\|^2 \geqslant 0$ donc $\mathrm{A} \in \mathrm{Sym}^+(p)$.

**Question 3.**

*a)* Le coefficient de rang $(i,j)$ de $(uu^{\mathrm{T}}) \odot (vv^{\mathrm{T}})$ vaut $(u_iu_j)(v_iv_j)$ ; celui de $(u\odot v)(u \odot v)^{\mathrm{T}}$ est égal à $(u_iv_j)(v_iu_j)$ donc $(uu^{\mathrm{T}}) \odot (vv^{\mathrm{T}}) = (u\odot v)(u\odot v)^{\mathrm{T}}$.

*b)* Pour tout $x \in \mathbb{R}^p$, $x = \displaystyle\sum_{k=1}^{p} \langle u_k \mid x\rangle u_k$ et $\mathrm{A}x = \displaystyle\sum_{k=1}^{p} \lambda_k \langle u_k \mid x\rangle u_k$.

Par ailleurs, $\Big(\displaystyle\sum_{k=1}^{p} \lambda_k u_k u_k^{\mathrm{T}}\Big)x = \sum_{k=1}^{p} \lambda_k u_k u_k^{\mathrm{T}} x = \sum_{k=1}^{p} \lambda_k u_k \langle u_k \mid x\rangle = \sum_{k=1}^{p} \lambda_k \langle u_k \mid x\rangle u_k$ donc $\mathrm{A}x = \Big(\displaystyle\sum_{k=1}^{p} \lambda_k u_k u_k^{\mathrm{T}}\Big)x$. Ceci étant vrai pour tout $x \in \mathbb{R}^p$, $\mathrm{A} = \displaystyle\sum_{k=1}^{k} \lambda_k u_k u_k^{\mathrm{T}}$. En particulier, $u_j^{\mathrm{T}}\mathrm{A}u_j = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \lambda_k \langle u_j \mid u_k\rangle^2 = \lambda_j$ car la base est orthonormée, donc $\mathrm{A} \in \mathrm{Sym}^+(p)$ implique $\lambda_j \geqslant 0$ pour tout $j \in [\![1,p]\!]$.

*c)* On note $\mu_1,\dots,\mu_p$ les valeurs propres de B, et $(v_1,\dots,v_p)$ une base orthonormée de vecteurs propres associés. Alors :

$$\mathrm{A}\odot\mathrm{B} = \Big(\sum_{i=1}^{p} \lambda_k u_k u_k^{\mathrm{T}}\Big) \odot \Big(\sum_{j=1}^{p} \mu_j v_j v_j^{\mathrm{T}}\Big) = \sum_{i,j} \lambda_j \mu_j (u_i u_i^{\mathrm{T}}) \odot (v_j v_j^{\mathrm{T}}) = \sum_{i,j} \lambda_i \mu_j (u_i \odot v_j)(u_i \odot v_j)^{\mathrm{T}}$$

D'après la question 2 on a $(u_i\odot v_j)(u_i\odot v_j)^{\mathrm{T}} \in \mathrm{Sym}^+(p)$ et puisque $\lambda_i\mu_j \geqslant 0$, la question 1 permet de conclure : $\mathrm{A}\odot\mathrm{B} \in \mathrm{Sym}^+(p)$.

## Partie II.

**Question 4.**

*a)* Pour tout $(i,j) \in [\![1,p]\!]^2$, $\mathrm{P}[\mathrm{A}]_{ij} = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} a_k \mathrm{A}_{ij}^k$ donc $\mathrm{P}[\mathrm{A}] = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} a_k \mathrm{A}^{(k)}$ puisque $\big[\mathrm{A}^{(k)}\big]_{ij} = \mathrm{A}_{ij}^k$.

*b)* La question 3c permet de prouver par récurrence sur $k$ que $\mathrm{A}^{(k)} \in \mathrm{Sym}^+(p)$. D'après la question 1 on en déduit que $\mathrm{P}[\mathrm{A}] \in \mathrm{Sym}^+(p)$ lorsque tous les $a_k$ sont positifs ou nuls.

**Question 5.**

*a)* $\mathrm{P}_n[\mathrm{A}]_{ij} = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{\mathrm{A}_{ij}^k}{k!}$ donc $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \mathrm{P}[\mathrm{A}]_{ij} = \exp(\mathrm{A}_{ij})$.

*b)* De ceci il résulte que $\exp[\mathrm{A}] = \displaystyle\lim_{n\to+\infty} \mathrm{P}_n[\mathrm{A}]$.

Notons déjà que si A est symétrique, il en est de même de $\exp[\mathrm{A}]$. Par ailleurs, d'après la question 4.b, $\mathrm{P}_n[\mathrm{A}] \in \mathrm{Sym}^+(p)$ donc pour tout $u \in \mathbb{R}^p$, $u^{\mathrm{T}}\mathrm{P}_n[\mathrm{A}]u \geqslant 0$. En faisant tendre $n$ vers $+\infty$ on obtient $u^{\mathrm{T}}\exp[\mathrm{A}]u \geqslant 0$, ce qui prouve que $\exp[\mathrm{A}] \in \mathrm{Sym}^+(p)$.

*c)* D'après les questions 2 et 3.c, pour tout $u \in \mathbb{R}^p$, $\exp[\mathrm{A}] \odot (uu^{\mathrm{T}}) \in \mathrm{Sym}^+(p)$.

**Question 6.**

*a)* La symétrie du produit scalaire entraîne que la matrice A est symétrique, et pour tout $u \in \mathbb{R}^p$,

$$u^{\mathrm{T}}\mathrm{A}u = \sum_{i,j} \langle x_i \mid x_j \rangle u_i u_j = \Big\langle \sum_{i=1}^{p} u_i x_i \;\Big|\; \sum_{j=1}^{p} u_j x_j \Big\rangle = \Big| \sum_{k=1}^{p} u_k x_k \Big|^2 \geqslant 0$$

donc $\mathrm{A} \in \mathrm{Sym}^+(p)$.

*b)* $(uu^{\mathrm{T}})_{ij} = u_i u_j = \exp\Big(-\dfrac{|x_i|^2+|x_j|^2}{2}\Big)$ donc $\big(\exp[\mathrm{A}] \odot (uu^{\mathrm{T}})\big)_{ij} = \exp\Big(\langle x_i \mid x_j\rangle - \dfrac{|x_i|^2+|x_j|^2}{2}\Big) = \exp\Big(-\dfrac{|x_i-x_j|^2}{2}\Big)$ car $|x_i-x_j|^2 = |x_i|^2 - 2\langle x_i \mid x_j\rangle + |x_j|^2$.

*c)* La matrice M définie par $\mathrm{M}_{ij} = \exp\Big(-\dfrac{|x_i-x_j|^2}{2}\Big)$ est donc égale à $\exp[\mathrm{A}] \odot (uu^{\mathrm{T}})$. D'après la question 5.c, $\mathrm{M} \in \mathrm{Sym}^+(p)$. Si on applique ce résultat aux vecteurs $\Big(\dfrac{x_i}{\sqrt{\lambda}}\Big)_{1 \leqslant i \leqslant p}$ de $\mathbb{R}^d$ on obtient que $\mathrm{K} \in \mathrm{Sym}^+(p)$.

# Partie III.

**Question 7.** Il existe $a, \mathrm{A}, b, \mathrm{B}$ dans $\mathbb{R}_+^*$ tels que pour tout $y \in \mathbb{R}$, $|f(y)| \leqslant \mathrm{A}\exp(-y^2/a)$ et $|g(y)| \leqslant \mathrm{B}\exp(-y^2/b)$. Alors $|f(y)g(y)| \leqslant \mathrm{AB}\exp(-y^2/c)$ avec $\dfrac{1}{c} = \dfrac{1}{a} + \dfrac{1}{b}$. On a $|fg| \leqslant \mathrm{AB}\gamma_c$ et puisque $\gamma_c$ est intégrable, il en est de même de $fg$.

**Question 8.**

*a)* Par positivité de l'intégrale, $(f \mid f) = \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f(y)^2\,\mathrm{d}y \geqslant 0$, et par continuité de $f$, il y a égalité si et seulement si pour tout $y \in \mathbb{R}$, $f(y)^2 = 0$, soit $f = 0$.

*b)* Pour tout $y \in \mathbb{R}$, $\tau_x(\gamma_\lambda)(y) = \gamma_\lambda(y-x) = \exp(-(y-x)^2/\lambda)$. On cherche donc un réel $a > 0$ tel que la fonction $y \mapsto -\dfrac{(y-x)^2}{\lambda} + \dfrac{y^2}{a}$ soit bornée. Or dès lors que $a < \lambda$ on a $\lim\limits_{\pm\infty}\Big(-\dfrac{(y-x)^2}{\lambda} + \dfrac{y^2}{a}\Big) = 0$, et une fonction continue qui possède des limites en $\pm\infty$ est bornée. On en déduit que $\tau_x(\gamma_\lambda) \in \mathscr{E}$.

**Question 9.**

*a)* On calcule en développant :

$$\frac{a+\lambda}{a\lambda}\Big(y - \frac{ax}{a+\lambda}\Big)^2 + \frac{x^2}{a+\lambda} = \frac{a+\lambda}{a\lambda}y^2 - \frac{2xy}{\lambda} + \frac{x^2}{\lambda} \qquad \text{et} \qquad \frac{(y-x)^2}{\lambda} + \frac{y^2}{a} = \frac{a+\lambda}{a\lambda}y^2 - \frac{2xy}{\lambda} + \frac{x^2}{\lambda}$$

d'où l'égalité. Le changement de variable $t = y - \dfrac{ax}{a+\lambda}$ donne alors :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \exp\Big(-\frac{(y-x)^2}{\lambda}\Big)\exp\Big(-\frac{y^2}{a}\Big)\mathrm{d}y = \exp\Big(-\frac{x^2}{a+\lambda}\Big)\int_{-\infty}^{+\infty} \exp\Big(-\frac{a+\lambda}{a\lambda}t^2\Big)\mathrm{d}t = c\exp\Big(-\frac{x^2}{a+\lambda}\Big)$$

où $c > 0$ est une constante.

*b)* Par hypothèse il existe $a > 0$ et $\mathrm{A} > 0$ tels que pour tout $y \in \mathbb{R}$, $|g(x)| \leqslant \mathrm{A}\exp(-y^2/a)$. Pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$\big|\mathrm{C}(g)(x)\big| \leqslant \int_{-\infty}^{+\infty} \tau_x(\gamma_\lambda)(y)\big|g(y)\big|\,\mathrm{d}y \leqslant \mathrm{A}\int_{-\infty}^{+\infty} \exp\Big(-\frac{(y-x)^2}{\lambda}\Big)\exp\Big(-\frac{y^2}{a}\Big)\mathrm{d}y \leqslant \mathrm{A}c\exp\Big(-\frac{x^2}{a+\lambda}\Big) = \mathrm{B}\exp(-x^2/b)$$

en posant $\mathrm{B} = \mathrm{A}c$ et $b = a + \lambda$. On en déduit que $\mathrm{C}(g) \in \mathscr{E}$.

*c)* Il reste à prouver la linéarité de C : si $g_1, g_2 \in \mathscr{E}$ et $\alpha \in \mathbb{R}$, alors pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$\mathrm{C}(\alpha g_1 + g_2)(x) = \big(\tau_x(\gamma_\lambda) \mid \alpha g_1 + g_2\big) = \alpha\big(\tau_x(\gamma_\lambda) \mid g_1\big) + \big(\tau_x(\gamma_\lambda) \mid g_2\big) = \big(\alpha\mathrm{C}(g_1) + \mathrm{C}(g_2)\big)(x)$$

car l'application $(f, g) \mapsto (f \mid g)$ est bilinéaire (de par la linéarité de l'intégrale). Il en résulte que C est un endomorphisme de $\mathscr{E}$.

# Partie IV.

**Question 10.** $\mathcal{G}$ contient la fonction nulle (prendre $n = 1$ et $\alpha_1 = 0$) et si $f = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \tau_{x_i}(\gamma_\lambda)$ et $g = \sum_{j=1}^{p} \beta_j \tau_{y_j}(\gamma_\lambda)$ alors $\mu f + g = \sum_{k=1}^{n+p} \delta_k \tau_{z_k}(\gamma_\lambda)$ en posant $\delta_k = \begin{cases} \mu\alpha_k & \text{si } k \leqslant n \\ \beta_{k-n} & \text{sinon} \end{cases}$ et $z_k = \begin{cases} x_k & \text{si } k \leqslant n \\ y_{k-n} & \text{sinon} \end{cases}$ donc $\mu f + g \in \mathcal{G}$.
On a prouvé que $\mathcal{G}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathscr{E}$. Il contient bien toutes les fonctions $\tau_x(\gamma_\lambda)$, et si $\mathcal{G}'$ est un autre sous-espace vectoriel contenant toutes ces fonctions, il contient aussi toutes leurs combinaisons linéaires donc il contient $\mathcal{G}$. Ce dernier est donc bien le plus petit (au sens de l'inclusion).

**Question 11.**

*a)* En développant on prouve sans peine de $\frac{1}{\lambda}\Big((y-x)^2 + (y-x')^2\Big) = \frac{2}{\lambda}\Big(y - \frac{x+x'}{2}\Big)^2 + \frac{1}{2\lambda}(x'-x)^2$, et le changement de variable $t = y - \frac{x+x'}{2}$ conduit à :

$$\Big(\tau_x(\gamma_\lambda) \;\Big|\; \tau_{x'}(\gamma_\lambda)\Big) = \int_{-\infty}^{+\infty} \exp\Big(-\frac{(y-x)^2}{\lambda}\Big)\exp\Big(-\frac{(y-x')^2}{\lambda}\Big)\mathrm{d}y = \exp\Big(-\frac{(x'-x)^2}{2\lambda}\Big)\int_{-\infty}^{+\infty} \exp(-2t^2/\lambda)\,\mathrm{d}t = c_\lambda \gamma_{2\lambda}(x'-x)$$

où $c_\lambda = \int_{-\infty}^{+\infty} \exp(-2t^2/\lambda)\,\mathrm{d}t > 0$ est une constante.

*b)* Pour tout $x' \in \mathbb{R}$, $\mathrm{C}\Big(\tau_x(\gamma_\lambda)\Big)(x') = \Big(\tau_{x'}(\gamma_\lambda) \;\Big|\; \tau_x(\gamma_\lambda)\Big) = c_\lambda \gamma_{2\lambda}(x'-x) = c_\lambda \tau_x(\gamma_{2\lambda})(x')$ donc $\mathrm{C}\Big(\tau_x(\gamma_\lambda)\Big) = c_\lambda \tau_x(\gamma_{2\lambda})$.
Par linéarité de C on en déduit :

$$\mathcal{H} = \Big\{ \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \mathrm{C}\Big(\tau_{x_i}(\gamma_\lambda)\Big) \;\Big|\; n \in \mathbb{N}^*,\ \forall i \in [\![1,n]\!],\ (x_i,\alpha_i) \in \mathbb{R}^2 \Big\} = \Big\{ \sum_{i=1}^{n} \alpha'_i \tau_{x_i}(\gamma_{2\lambda}) \;\Big|\; n \in \mathbb{N}^*,\ \forall i \in [\![1,n]\!],\ (x_i,\alpha'_i) \in \mathbb{R}^2 \Big\}$$

en posant $\alpha'_i = c_\lambda \alpha_i \iff \alpha_i = \frac{\alpha'_i}{c_\lambda}$.

**Question 12.**

*a)* Montrons par récurrence sur $n \in \mathbb{N}^*$ que la famille $\Big(\tau_{x_i}(\gamma_{2\lambda})\Big)_{1 \leqslant i \leqslant n}$ est libre.

– C'est vrai pour $n = 1$ car la fonction $\tau_{x_1}(\gamma_{2\lambda})$ n'est pas la fonction nulle.
– Si $n > 1$, supposons le résultat acquis au rang $n-1$, et considérons des scalaires $(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ tels que $\sum_{i=1}^{n} \alpha_i \tau_{x_i}(\gamma_{2\lambda}) = 0$, soit pour tout $y \in \mathbb{R}$,

$$\sum_{i=1}^{n} \alpha_i \exp\Big(-(y-x_i)^2/(2\lambda)\Big) = 0 \tag{1}$$

En dérivant on obtient : pour tout $y \in \mathbb{R}$, $\sum_{i=1}^{n} \alpha_i (x_i - y) \exp\Big(-(y-x_i)^2/(2\lambda)\Big) = 0$, qui se simplifie à l'aide de (1) en :

$$\sum_{i=1}^{n} \alpha_i x_i \exp\Big(-(y-x_i)^2/(2\lambda)\Big) = 0 \tag{2}$$

On réalise alors la combinaison linéaire $(2) - x_n(1)$ pour obtenir : $\sum_{i=1}^{n-1} \alpha_i (x_i - x_n) \tau_{x_i}(\gamma_{2\lambda}) = 0$. Par hypothèse de récurrence on en déduit que pour tout $i \in [\![1, n-1]\!]$, $\alpha_i(x_i - x_n) = 0$, donc $\alpha_i = 0$ pour $i \in [\![1, n-1]\!]$, puis enfin $\alpha_n = 0$. La récurrence se propage.

*b)* Ceci nous permet d'affirmer que pour tout $h \in \mathcal{H}$ il existe un unique entier $n \in \mathbb{N}^*$ et des uniques $(x_i, \alpha_i) \in \mathbb{R}^2$ pour $i \in [\![1,n]\!]$ tels que $h = \sum_{i=1}^{n} \alpha'_i \tau_{x_i}(\gamma_{2\lambda})$. On définit donc une unique application linéaire $\mathrm{D} : \mathcal{H} \to \mathcal{G}$ en posant $\mathrm{D}(h) = \frac{1}{c_\lambda} \sum_{i=1}^{n} \alpha'_i \tau_{x_i}(\gamma_\lambda)$ et compte tenu du calcul fait en 11.b on a $\mathrm{C}\Big(\mathrm{D}(h)\Big) = h$, ainsi que pour tout $g \in \mathcal{G}$, $\mathrm{D}\Big(\mathrm{C}(g)\Big) = g$.

*c)* Posons $g = \mathrm{D}(h)$. Alors $(\tau_x(\gamma_\lambda) \mid \mathrm{D}(h)) = (\tau_x(\gamma_\lambda) \mid g) = \mathrm{C}(g)(x) = h(x)$ par définition de C.

**Question 13.**

*a)* La bilinéarité de $(\cdot\,|\,\cdot)_{\mathcal{H}}$ résulte de la linéarité de l'intégrale.

De plus, pour tout $h \in \mathcal{H}$, $(h\,|\,h)_{\mathcal{H}} = c_\lambda\big(\mathrm{D}(h)\,\big|\,\mathrm{D}(h)\big) \geqslant 0$, avec égalité si et seulement si $\mathrm{D}(h) = 0$ (question 8.a) car $c_\lambda > 0$. Or dans ce cas $h = \mathrm{C}(\mathrm{D}(h)) = \mathrm{C}(0) = 0$, donc $(\cdot\,|\,\cdot)_{\mathcal{H}}$ est défini positif : c'est un produit scalaire.

*b)* $\big(\tau_x(\gamma_{2\lambda})\,\big|\,h\big)_{\mathcal{H}} = c_\lambda\big(\mathrm{D}(\tau_x(\gamma_{2\lambda}))\,\big|\,\mathrm{D}(h)\big) = \big(\tau_x(\gamma_\lambda)\,\big|\,\mathrm{D}(h)\big) = h(x)$ d'après 12.c (en effet, d'après 11.b, $\mathrm{D}\big(c_\lambda \tau_x(\gamma_{2\lambda})\big) = \tau_x(\gamma_\lambda)$).

*c)* D'après l'inégalité de Cauchy-Schwarz, $\big|h(x)\big| \leqslant \big\|\tau_x(\gamma_{2\lambda})\big\|_{\mathcal{H}} \times \big\|h\big\|_{\mathcal{H}}$.

On a $\big\|\tau_x(\gamma_{2\lambda})\big\|_{\mathcal{H}}^2 = c_\lambda\big(\mathrm{D}(\tau_x(\gamma_\lambda))\,\big|\,\mathrm{D}(\tau_x(\gamma_\lambda))\big) = \dfrac{1}{c_\lambda}\big(\tau_x(\gamma_\lambda)\,\big|\,\tau_x(\gamma_\lambda)\big) = \gamma_{2\lambda}(0) = 1$ d'après 11.a, donc on a montré que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\big|h(x)\big| \leqslant \big\|h\big\|_{\mathcal{H}}$, soit $\big\|h\big\|_\infty \leqslant \big\|h\big\|_{\mathcal{H}}$.

# Partie V.

**Question 14.** Remarquons que $\mathcal{S}$ est convexe :
si $h_1$ et $h_2$ sont dans $\mathcal{S}$ alors pour tout $t \in [0,1]$, $((1-t)h_1 + th_2)(x_i) = (1-t)a_i + ta_i = a_i$ donc $(1-t)h_1 + th_2 \in \mathcal{S}$.
Supposons maintenant que $\mathcal{S}_*$ contienne deux éléments $h_1$ et $h_2$. D'après ce qui précède, $\dfrac{h_1+h_2}{2} \in \mathcal{S}$.
On a $(h_1 - h_2\,|\,h_1 + h_2)_{\mathcal{H}} = \|h_1\|_{\mathcal{H}}^2 - \|h_2\|_{\mathcal{H}}^2 = 0$ donc d'après le théorème de Pythagore, $\left\|\dfrac{h_1+h_2}{2}\right\|_{\mathcal{H}}^2 + \left\|\dfrac{h_1-h_2}{2}\right\|_{\mathcal{H}}^2 = \|h_1\|_{\mathcal{H}}^2 = 2\mathrm{J}_*$.
Si $h_1 \neq h_2$ on en déduit que $\mathrm{J}\Big(\dfrac{h_1+h_2}{2}\Big) < \mathrm{J}_*$, ce qui contredit la définition de $\mathrm{J}_*$. On en déduit que $\mathcal{S}_*$ a au plus un élément.

**Question 15.** Pour tout $t \in \mathbb{R}$, $\tilde{h} + th_0 \in \mathcal{S}$ donc $\|\tilde{h} + th_0\|_{\mathcal{H}}^2 \geqslant \|\tilde{h}\|_{\mathcal{H}}^2$.
En développant on obtient : $\forall t \in \mathbb{R}$, $t^2\|h_0\|_{\mathcal{H}}^2 + 2t(\tilde{h}\,|\,h_0)_{\mathcal{H}} \geqslant 0$, soit $t\big(t\|h_0\|_{\mathcal{H}}^2 + 2(\tilde{h}\,|\,h_0)_{\mathcal{H}}\big) \geqslant 0$.
Pour tout $t > 0$, on a donc $t\|h_0\|_{\mathcal{H}}^2 + 2(\tilde{h}\,|\,h_0)_{\mathcal{H}} \geqslant 0$, et en faisant tendre $t$ vers $0^+$ on obtient $(\tilde{h}\,|\,h_0)_{\mathcal{H}} \geqslant 0$.
De même, pour tout $t < 0$, $t\|h_0\|_{\mathcal{H}}^2 + 2(\tilde{h}\,|\,h_0)_{\mathcal{H}} \leqslant 0$, et en faisant tendre $t$ vers $0^-$ on obtient cette fois $(\tilde{h}\,|\,h_0)_{\mathcal{H}} \leqslant 0$, et donc en définitive $(\tilde{h}\,|\,h_0)_{\mathcal{H}} = 0$.

**Question 16.**

*a)* La question 15 a montré que $\mathcal{S}_* \subset \mathcal{H}_0^\perp$ et donc que $\mathcal{S}_* \subset \mathcal{S} \cap \mathcal{H}_0^\perp$.
Réciproquement, soit $\tilde{h} \in \mathcal{S} \cap \mathcal{H}_0^\perp$. Pour tout $h \in \mathcal{S}$ on a $h - \tilde{h} \in \mathcal{H}_0$ donc d'après le théorème de Pythagore, $\|h\|_{\mathcal{H}}^2 = \|\tilde{h}\|_{\mathcal{H}}^2 + \|h - \tilde{h}\|_{\mathcal{H}}^2 \geqslant \|\tilde{h}\|_{\mathcal{H}}^2$, ce qui prouve que $\tilde{h} \in \mathrm{S}_*$. On a bien prouvé que $\mathcal{S}_* = \mathcal{S} \cap \mathcal{H}_0^\perp$.

*b)* Soit $h_0 \in \mathcal{H}_0$. Alors $\big(h_0\,\big|\,\tau_{x_i}(\gamma_{2\lambda})\big)_{\mathcal{H}} = h_0(x_i) = 0$ d'après 13.b, donc $\tau_{x_i}(\gamma_{2\lambda}) \in \mathcal{H}_0^\perp$. Il en est donc de même de toute combinaison linéaire de ces fonctions.

**Question 17.**

*a)* La $i^{\mathrm{e}}$ ligne du système $\mathrm{K}\alpha = a$ s'écrit : $\displaystyle\sum_{j=1}^{n} \mathrm{K}_{ij}\alpha_j = a_i$, soit $\displaystyle\sum_{j=1}^{n} \alpha_j \exp\Big(-\frac{(x_i - x_j)^2}{2\lambda}\Big) = a_i$.

Or $\exp\Big(-\dfrac{(x_i - x_j)^2}{2\lambda}\Big) = \gamma_{2\lambda}(x_i - x_j) = \tau_{x_j}(\gamma_{2\lambda})(x_i)$ donc cette condition équivaut à $\Big(\displaystyle\sum_{j=1}^{n} \alpha_j \tau_{x_j}(\gamma_{2\lambda})\Big)(x_i) = a_i$, soit $h_\alpha(x_i) = a_i$.

Ainsi, $h_\alpha$ est interpolante si et seulement si $\mathrm{K}\alpha = a$.

*b)* En particulier, on a $\mathrm{K}\alpha = 0 \iff h_\alpha \in \mathcal{H}_0$, ce qui signifie que $\displaystyle\sum_{i=1}^{p} \alpha_i \tau_{x_i}(\gamma_{2\lambda}) = 0$. Mais la famille de fonctions $\big(\tau_{x_i}(\gamma_{2\lambda})\big)_{1\leqslant i\leqslant p}$ est libre (question 12.a) donc $\alpha = 0$. Nous avons montré que l'application $\alpha \mapsto \mathrm{K}\alpha$ est injective, donc bijective (la dimension est finie), ce qui signifie que la matrice K est inversible.

**Question 18.** Si on pose $\alpha_* = \mathrm{K}^{-1}a$, la fonction $h_{\alpha_*}$ est interpolante donc appartient à $\mathcal{S} \cap \mathcal{H}_0^\perp$ d'après 16.b, et donc à $\mathcal{S}_*$ d'après 16.a. On a donc (en utilisant 13.b) :

$$\mathrm{J}_* = \frac{1}{2}\big\|h_{\alpha_*}\big\|_{\mathcal{H}}^2 = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{p} \alpha_{*i}\big(\tau_{x_i}(\gamma_{2\lambda})\,\big|\,h_{\alpha_*}\big) = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{p} \alpha_{*i} h_{\alpha_*}(x_i) = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{p} \alpha_{*i} a_i = \frac{1}{2}\langle a\,|\,\alpha_*\rangle = \frac{1}{2}a^{\mathrm{T}}\mathrm{K}^{-1}a.$$