

TRANSFORMATION DE LAPLACE (CENTRALE PSI 2012)

Durée : 4 heures

- Dans le problème, λ désigne *toujours* une application continue de \mathbb{R}^+ dans \mathbb{R}^+ , croissante et non majorée.
- Dans le problème, f désigne *toujours* une application continue de \mathbb{R}^+ dans \mathbb{R} .
- On note E l'ensemble des réels x pour lesquels l'application $t \mapsto f(t)e^{-\lambda(t)x}$ est intégrable sur \mathbb{R}^+ .
- On note E' l'ensemble des réels x pour lesquels l'intégrale $\int_0^{+\infty} f(t)e^{-\lambda(t)x} dt$ converge.

On se propose ci-après d'étudier la transformation $f \mapsto Lf$ définie en en I.A, d'en établir quelques propriétés, et d'examiner certains exemples.

I Préliminaires, définition de la transformation L

I.A – Quelle inclusion existe-t-il entre les ensembles E et E' ?

Désormais, pour $x \in E'$, on notera $Lf(x) = \int_0^{+\infty} f(t)e^{-\lambda(t)x} dt$.

I.B – Montrer que si E n'est pas vide, alors E est un intervalle non majoré de \mathbb{R} .

I.C – Montrer que si E n'est pas vide, alors Lf est continue sur E .

II Exemples dans le cas de f positive

II.A – Comparer E et E' dans le cas où f est positive.

II.B – Dans les trois cas suivants, déterminer E .

II.B.1) $f(t) = \lambda'(t)$ avec λ supposée de classe \mathcal{C}^1 .

II.B.2) $f(t) = e^{t\lambda(t)}$.

II.B.3) $f(t) = \frac{e^{-t\lambda(t)}}{1+t^2}$.

II.C – Dans cette question, on étudie le cas $\lambda(t) = t^2$ et $f(t) = \frac{1}{1+t^2}$ pour tout $t \in \mathbb{R}^+$.

II.C.1) Déterminer E . Que vaut $Lf(0)$?

II.C.2) Prouver que Lf est dérivable sur $]0, +\infty[$.

II.C.3) Montrer l'existence d'une constante $A > 0$ telle que pour tout $x > 0$, on ait $Lf(x) - (Lf)'(x) = \frac{A}{\sqrt{x}}$.

II.C.4) On note $g(x) = e^{-x}Lf(x)$ pour $x \geq 0$. Montrer que pour tout $x \geq 0$, $g(x) = \frac{\pi}{2} - A \int_0^x \frac{e^{-t}}{\sqrt{t}} dt$.

II.C.5) En déduire la valeur de l'intégrale $\int_0^{+\infty} e^{-t^2} dt$.

III Étude d'un premier exemple

Dans cette partie, $\lambda(t) = t$ pour tout $t \in \mathbb{R}^+$ et $f(t) = \frac{t}{e^t - 1} - 1 + \frac{t}{2}$ pour tout $t \in \mathbb{R}^{+*}$.

III.A – Montrer que f se prolonge par continuité en 0. On note encore f le prolongement obtenu.

III.B – Déterminer E .

III. C – À l'aide d'un développement en série, montrer que pour tout $x > 0$, on a

$$Lf(x) = \frac{1}{2x^2} - \frac{1}{x} + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(n+x)^2}.$$

III. D – Est-ce que $Lf(x) - \frac{1}{2x^2} + \frac{1}{x}$ admet une limite finie en 0^+ ?

IV Généralités dans le cas typique

Dans cette partie, $\lambda(t) = t$ pour $t \in \mathbb{R}^+$.

IV. A – Montrer que si E n'est pas vide et si α est sa borne inférieure (on convient que $\alpha = -\infty$ si $E = \mathbb{R}$) alors Lf est de classe C^∞ sur $] \alpha, +\infty[$ et exprimer ses dérivées successives à l'aide d'une intégrale.

IV. B – Dans le cas particulier où $f(t) = e^{-at}t^n$ pour tout $t \in \mathbb{R}^+$, avec $n \in \mathbb{N}$ et $a \in \mathbb{R}$, expliciter E , E' et calculer $Lf(x)$ pour $x \in E'$.

IV. C – Comportement en l'infini

On suppose ici que E n'est pas vide et que f admet au voisinage de 0 le développement limité d'ordre $n \in \mathbb{N}$ suivant :

$$f(t) = \sum_{k=0}^n \frac{a_k}{k!} t^k + O(t^{n+1}).$$

IV. C. 1) Montrer que pour tout $\beta > 0$, on a, lorsque x tend vers $+\infty$, le développement asymptotique suivant :

$$\int_0^\beta \left(f(t) - \sum_{k=0}^n \frac{a_k}{k!} t^k \right) e^{-tx} dt = O(x^{-n-2})$$

IV. C. 2) En déduire que lorsque x tend vers $+\infty$, on a le développement asymptotique :

$$Lf(x) = \sum_{k=0}^n \frac{a_k}{x^{k+1}} + O(x^{-n-2})$$

IV. D – Comportement en 0

On suppose ici que f admet une limite finie ℓ en $+\infty$.

IV. D. 1) Montrer que E contient \mathbb{R}^{+*} .

IV. D. 2) Montrer que $xLf(x)$ tend vers ℓ en 0^+ .

V Étude d'un deuxième exemple

Dans cette partie, $\lambda(t) = t$ pour tout $t \in \mathbb{R}^+$ et $f(t) = \frac{\sin(t)}{t}$ pour tout $t > 0$, f étant prolongée par continuité en 0.

V. A – Montrer que E ne contient pas 0 mais que E' contient 0.

V. B – Montrer que $E =]0, +\infty[$.

V. C – Calculer $(Lf)'(x)$ pour $x \in E$.

V. D – En déduire $(Lf)(x)$ pour $x \in E$.

V. E – On note pour $n \in \mathbb{N}$ et $x \geq 0$, $f_n(x) = \int_{n\pi}^{(n+1)\pi} \frac{\sin(t)}{t} e^{-tx} dt$. Montrer que $\sum (f_n)_{n \geq 0}$ converge uniformément sur $[0, +\infty[$.

V. F – Que vaut $Lf(0)$?

VI Injectivité dans le cas typique

Dans cette partie, $\lambda(t) = t$ pour tout $t \in \mathbb{R}^+$.

VI. A – Soit g une application continue de $[0, 1]$ dans \mathbb{R} . On suppose que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $\int_0^1 t^n g(t) dt = 0$.

VI. A. 1) Que dire de $\int_0^1 P(t)g(t) dt$ pour $P \in \mathbb{R}[X]$?

VI. A. 2) On admet qu'il existe une suite de polynômes $(P_n)_{n \in \mathbb{N}}$ qui converge uniformément vers g sur $[0, 1]$ (théorème de Weierstrass). En déduire que g est l'application nulle.

VI. B – Soient f fixée telle que E soit non vide, $x \in E$ et $a > 0$. On pose $h(t) = \int_0^t e^{-xu} f(u) du$ pour tout $t \geq 0$.

VI. B. 1) Montrer que $Lf(x+a) = a \int_0^{+\infty} e^{-at} h(t) dt$.

VI. B. 2) On suppose que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $Lf(x+na) = 0$. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, l'intégrale $\int_0^1 u^n h\left(-\frac{\ln(u)}{a}\right) du$ converge et qu'elle est nulle.

VI. B. 3) Qu'en déduit-on pour la fonction h ?

VI. B. 4) Montrer que l'application qui à f associe Lf est injective.

VII Étude en la borne inférieure de E

VII. A – Cas positif

On suppose que f est positive et que E n'est ni vide ni égal à \mathbb{R} . On note α sa borne inférieure.

VII. A. 1) Montrer que si Lf est bornée sur E , alors $\alpha \in E$.

VII. A. 2) Si $\alpha \notin E$, que dire de $Lf(x)$ quand x tend vers α^+ ?

VII. B – Dans cette question, $f(t) = \cos(t)$ et $\lambda(t) = \ln(1+t)$.

VII. B. 1) Déterminer E .

VII. B. 2) Déterminer E' .

VII. B. 3) Montrer que Lf admet une limite en α , borne inférieure de E , et la déterminer.

