Corrigé : transformation de Laplace (Centrale PSI 2012)

I Préliminaires, définition de la transformation L

I. A – La convergence absolue d'une intégrale entraîne la convergence simple, donc $\mathrm{E} \subset \mathrm{E}'$.

I. B – Soit $x \in \mathrm{E}$, et $y \geqslant x$. Puisque λ est à valeurs positives, $|f(t)|\mathrm{e}^{-\lambda(t)y} \underset{t\to+\infty}{=} \mathrm{O}(|f(t)|\mathrm{e}^{-\lambda(t)x})$, ce qui montre que $y \in \mathrm{E}$. Nous avons donc montré que $x \in \mathrm{E} \implies [x,+\infty[\subset \mathrm{E}$. En posant $a = \inf \mathrm{E}$ (avec la convention $a = -\infty$ si E n'est pas minoré), ceci montre que $\mathrm{E} =]a,+\infty[$ ou $\mathrm{E} = [a,+\infty[$.

I. C – Notons $g : (t,x) \mapsto f(t)\mathrm{e}^{-\lambda(t)x}$ et appliquons le théorème de continuité des intégrales à paramètre sur l'intervalle $[x_0,+\infty[$, avec $x_0 \in \mathrm{E}$:

- pour tout $x \geqslant x_0$, la fonction $t \mapsto g(t,x)$ est continue par morceaux et intégrable sur $[0,+\infty[$;
- pour tout $t \in [0,+\infty[$, la fonction $x \mapsto g(t,x)$ est continue sur $[x_0,+\infty[$;
- pour tout $x \geqslant x_0$, $|f(t)|\mathrm{e}^{-\lambda(t)x} \leqslant |f(t)|\mathrm{e}^{-\lambda(t)x_0} = \phi(t)$.

La fonction ϕ est continue par morceaux et intégrable puisque $x_0 \in \mathrm{E}$, donc le théorème s'applique : $\mathrm{L}f$ est continue sur $[x_0,+\infty[$, puis par recouvrement sur E tout entier.

II Exemples dans le cas de f positive

II. A – Lorsque f est à valeurs positives, $|f(t)| = f(t)$ donc convergence simple et absolues coïncident, et $\mathrm{E} = \mathrm{E}'$.

II. B – Dans les trois cas, on détermine E' puisque $\mathrm{E} = \mathrm{E}'$.

II. B. 1) Nous avons $\displaystyle\int_0^{\mathrm{T}} \lambda'(t)\mathrm{e}^{-\lambda(t)x}\,\mathrm{d}t = \begin{cases} \dfrac{1}{x}\left(\mathrm{e}^{\lambda(0)x} - \mathrm{e}^{-\lambda(\mathrm{T})x}\right) & \text{si } x \neq 0 \\ \lambda(\mathrm{T}) - \lambda(0) & \text{si } x = 0 \end{cases}$

λ est croissante et non majorée donc $\lim\limits_{+\infty} \lambda(\mathrm{T}) = +\infty$. Ainsi, l'intégrale ci-dessus possède une limite finie lorsque T tend vers $+\infty$ si et seulement si $x > 0$. D'où $\mathrm{E} =]0,+\infty[$.

II. B. 2) Nous avons $f(t)\mathrm{e}^{-\lambda(t)x} = \mathrm{e}^{\lambda(t)(t-x)}$ donc pour $t \geqslant x$ nous avons $f(t)\mathrm{e}^{-\lambda(t)x} \geqslant 1$. Mais $t \mapsto 1$ n'est pas intégrable sur $[0,+\infty[$ donc $x \notin \mathrm{E}$. Ainsi, $\mathrm{E} = \varnothing$.

II. B. 3) Soit $x \in \mathbb{R}$. Nous avons cette fois $0 \leqslant f(t)\mathrm{e}^{-\lambda(t)x} = \dfrac{\mathrm{e}^{-\lambda(t)(x+t)}}{1+t^2} \leqslant \dfrac{1}{1+t^2}$ pour $t \geqslant -x$. Or $t \mapsto \dfrac{1}{1+t^2}$ est intégrable sur $[0,+\infty[$ donc $x \in \mathrm{E}$ et ainsi $\mathrm{E} = \mathbb{R}$.

II. C –

II. C. 1) On a $f(t)\mathrm{e}^{-\lambda(t)x} = \dfrac{\mathrm{e}^{-t^2x}}{1+t^2}$ donc si $x \geqslant 0$, $f(t)\mathrm{e}^{-\lambda(t)x} \leqslant \dfrac{1}{1+t^2}$ et si $x < 0$ alors $1 = \mathrm{O}\left(f(t)\mathrm{e}^{-\lambda(t)x}\right)$ donc $\mathrm{E} = [0,+\infty[$.

$\mathrm{L}f(0) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{1+t^2} = \Big[\arctan(t)\Big]_0^{t\to+\infty} = \frac{\pi}{2}$.

II. C. 2) Notons $h : (t,x) \mapsto \dfrac{\mathrm{e}^{-t^2x}}{1+t^2}$ et appliquons le théorème de dérivation des intégrales à paramètre sur l'intervalle $[x_0,+\infty[$, avec $x_0 > 0$:

- pour tout $x \geqslant x_0$, la fonction $t \mapsto h(t,x)$ est continue par morceaux et intégrable sur $[0,+\infty[$;
- pour tout $t \in [0,+\infty[$, la fonction $x \mapsto h(t,x)$ est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $[x_0,+\infty[$, et $\dfrac{\partial h}{\partial x}(t,x) = \dfrac{-t^2}{1+t^2}\mathrm{e}^{-t^2x}$;
- pour tout $x \geqslant x_0$, la fonction $t \mapsto \dfrac{\partial h}{\partial x}(t,x)$ est continue par morceaux, et $\left|\dfrac{\partial h}{\partial x}(t,x)\right| \leqslant \mathrm{e}^{-t^2x_0} = \psi(t)$.

La fonction ψ est continue par morceaux et intégrable donc le théorème s'applique : $\mathrm{L}f$ est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $[x_0,+\infty[$, puis par recouvrement sur $]0,+\infty[$.

II. C. 3) De plus, $(\mathrm{L}f)'(x) = -\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{t^2}{1+t^2}\mathrm{e}^{-t^2x}\,\mathrm{d}t$ donc $(\mathrm{L}f)(x) - (\mathrm{L}f)'(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-t^2x}\,\mathrm{d}t$.

Le changement de variable bijectif $u = t\sqrt{x}$ donne $\displaystyle\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-t^2x}\,\mathrm{d}t = \frac{\mathrm{A}}{\sqrt{x}}$ avec $\mathrm{A} = \displaystyle\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-u^2}\,\mathrm{d}u$.

II. C. 4) g est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $]0,+\infty[$ et $g'(x) = \mathrm{e}^{-x}\Big((\mathrm{L}f)'(x) - (\mathrm{LF})(x)\Big) = -\mathrm{A}\dfrac{\mathrm{e}^{-x}}{\sqrt{x}}$. La fonction $x \mapsto \dfrac{\mathrm{e}^{-x}}{\sqrt{x}}$ est continue sur $]0,+\infty[$ et intégrable au voisinage de 0 donc d'après le théorème fondamental de l'intégration, la fonction $x \mapsto \displaystyle\int_0^x \frac{\mathrm{e}^{-t}}{\sqrt{t}}\,\mathrm{d}t$ est définie et de classe $\mathscr{C}^1$ sur $[0,+\infty[$. g étant continue en 0 on en déduit que $g(x) = g(0) - \mathrm{A}\displaystyle\int_0^x \frac{\mathrm{e}^{-t}}{\sqrt{t}}\,\mathrm{d}t$, avec $g(0) = \dfrac{\pi}{2}$.

II. C. 5) Le changement de variable bijectif $t = u^2$ donne $g(x) = \dfrac{\pi}{2} - 2\mathrm{A}\displaystyle\int_0^{\sqrt{x}} \mathrm{e}^{-u^2}\,\mathrm{d}u$ donc $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} g(x) = \frac{\pi}{2} - 2\mathrm{A}^2$, compte tenu de l'expression initiale de A.
Par ailleurs, $g(x) = \mathrm{e}^{-x}\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-t^2x}}{1+t^2}\,\mathrm{d}t$ donc $0 \leqslant g(x) \leqslant \mathrm{e}^{-x}\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{\mathrm{d}t}{1+t^2} = \frac{\pi}{2}\mathrm{e}^{-x}$ et $\displaystyle\lim_{+\infty} g(x) = 0$. On en déduit que $\mathrm{A}^2 = \dfrac{\pi}{4}$ puis que $\mathrm{A} = \dfrac{\sqrt{\pi}}{2}$ puisque $\mathrm{A} \geqslant 0$.

III Étude d'un premier exemple

III. A – $\mathrm{e}^t - 1 \underset{0}{\sim} t$ donc $\displaystyle\lim_0 f(t) = 0$. f se prolonge par continuité en posant $f(0) = 0$.

III. B – $f(t) \underset{+\infty}{\sim} \dfrac{t}{2}$ donc f est positive au voisinage de $+\infty$, et $f(t)\mathrm{e}^{-tx} \underset{+\infty}{\sim} \dfrac{t}{2}\mathrm{e}^{-xt}$.
Si $x > 0$ alors $f(t)\mathrm{e}^{-xt} \underset{+\infty}{=} \mathrm{O}\big(\mathrm{e}^{-xt/2}\big)$ donc $x \in \mathrm{E}$; si $x = 0$, $t \mapsto t$ n'est pas intégrable donc $0 \notin \mathrm{E}$. Puisque E est un intervalle non majoré, $\mathrm{E} =]0,+\infty[$.

III. C – Pour tout $x > 0$, $\displaystyle\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-xt}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{x}$, $\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{t}{2}\mathrm{e}^{-xt}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{2x^2}$ (résultat obtenu par une double intégration par parties), et :

$$\int_0^{+\infty}\frac{t\,\mathrm{e}^{-xt}}{\mathrm{e}^t-1}\,\mathrm{d}t = \int_0^{+\infty}\frac{t\,\mathrm{e}^{-(x+1)t}}{1-\mathrm{e}^{-t}}\,\mathrm{d}t = \int_0^{+\infty} t\,\mathrm{e}^{-(x+1)t}\Big(\sum_{n=0}^{+\infty}\mathrm{e}^{-nt}\Big)\mathrm{d}t = \int_0^{+\infty}\sum_{n=1}^{+\infty} f_n(t)\,\mathrm{d}t \quad \text{avec } f_n(t) = t\,\mathrm{e}^{-(x+n)t}.$$

On applique le théorème d'interversion somme / intégrale :
- les fonctions f_n sont continues par morceaux et intégrables sur $[0,+\infty[$;
- la série $\sum f_n$ converge simplement sur $[0,+\infty[$, et sa somme y est continue par morceaux ;
- $\displaystyle\int_0^{+\infty}|f_n(t)|\,\mathrm{d}t = \frac{1}{(x+n)^2}$ (résultat obtenu par une double intégration par parties).

La série $\displaystyle\sum\frac{1}{(n+x)^2}$ converge donc le théorème s'applique, et $\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{t\,\mathrm{e}^{-xt}}{\mathrm{e}^t-1}\,\mathrm{d}t = \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{(n+x)^2}$.
On conclut par linéarité : $(\mathrm{L}f)(x) = \dfrac{1}{2x^2} - \dfrac{1}{x} + \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{(n+x)^2}$.

III. D – Notons maintenant $f_n(t) = \dfrac{1}{(n+x)^2}$. Sur l'intervalle $[0,+\infty[$ on a $\|f_n\|_\infty = \dfrac{1}{n^2}$ donc la série de fonctions $\sum f_n$ converge normalement donc uniformément sur $[0,+\infty[$. Chacune des fonctions f_n étant continue sur $[0,+\infty[$ il en est de même de leur somme, et ainsi : $\displaystyle\lim_0\Big((\mathrm{L}f)(x) - \frac{1}{2x^2} + \frac{1}{x}\Big) = \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$.

IV Généralités dans le cas typique

IV. A – Soit $x_0 > \alpha = \inf \mathrm{E}$. Notons $h : (t,x) \mapsto f(t)\mathrm{e}^{-xt}$ et appliquons le théorème de dérivation des intégrales à paramètre sur l'intervalle $[x_0,+\infty[$:
- pour tout $x \geqslant x_0$, la fonction $t \mapsto h(t,x)$ est continue par morceaux et intégrable sur $[0,+\infty[$;
- pour tout $t \in [0,+\infty[$, la fonction $x \mapsto h(t,x)$ est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $[x_0,+\infty[$, et $\dfrac{\partial^n h}{\partial x^n}(t,x) = (-t)^n f(t)\mathrm{e}^{-tx}$;
- pour tout $x \geqslant x_0$, la fonction $t \mapsto \dfrac{\partial^n h}{\partial x^n}(t,x)$ est continue par morceaux, et $\Big|\dfrac{\partial^n h}{\partial x^n}(t,x)\Big| \leqslant t^n|f(t)|\mathrm{e}^{-x_0t} = \phi_n(t)$.

Puisque $x_0 > \alpha$, on peut choisir $x_1 \in \mathrm{E}$ tel que $x_0 > x_1$. On a alors $t^n \,\mathrm{e}^{-x_0 t} \underset{+\infty}{=} \mathrm{o}(\mathrm{e}^{-x_1 t})$ donc $\phi_n(t) \underset{+\infty}{=} \mathrm{O}\Big(|f(t)|\mathrm{e}^{-x_1 t}\Big)$. Ceci prouve, puisque $x_1 \in \mathrm{E}$, que la fonction ϕ_n est intégrable sur $[0,+\infty[$.
On en déduit que la fonction $\mathrm{L}f$ est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $[x_0,+\infty[$ puis par recouvrement sur $]\alpha,+\infty[$, et que $(\mathrm{L}f)^{(n)}(x) = (-1)^n \displaystyle\int_0^{+\infty} t^n f(t)\mathrm{e}^{-xt}\,\mathrm{d}t$.

IV. B – $t \mapsto f(t)\mathrm{e}^{-xt} = t^n \,\mathrm{e}^{-(x+a)t}$ est intégrable sur $[0,+\infty[$ si et seulement si $x+a>0$; étant à valeurs positives on en déduit que $\mathrm{E} = \mathrm{E}' =]-a,+\infty[$.
Pour tout $x > -a$, le changement de variable bijectif $u = (x+a)t$ donne :

$$(\mathrm{L}f)(x) = \int_0^{+\infty} t^n \,\mathrm{e}^{-(x+a)t}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{(x+a)^{n+1}} \int_0^{+\infty} u^n \,\mathrm{e}^{-u}\,\mathrm{d}u = \frac{n!}{(x+a)^{n+1}} \quad \text{(résultat classique)}$$

IV. C – Comportement en l'infini

IV. C. 1) Par hypothèse il existe une fonction g bornée au voisinage de 0 telle que $f(t) - \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{a_k}{k!} t^k = t^{n+1} g(t)$. En intégrant on obtient : $\displaystyle\int_0^\beta \Big(f(t) - \sum_{k=0}^{n} \frac{a_k}{k!} t^k\Big)\mathrm{e}^{-xt}\,\mathrm{d}t = \int_0^\beta t^{n+1} g(t)\mathrm{e}^{-xt}\,\mathrm{d}t$.
La fonction g est bornée au voisinage de 0 donc il existe $c > 0$ telle que g est bornée sur $[0,c]$. Mais g est continue sur $[c,\beta]$ donc aussi bornée sur cet intervalle. Elle est donc bornée sur $[0,\beta]$, et

$$\Big|\int_0^\beta t^{n+1} g(t)\mathrm{e}^{-xt}\,\mathrm{d}t\Big| \leqslant \|g\|_{\infty,[0,\beta]} \int_0^\beta t^{n+1}\,\mathrm{e}^{-xt}\,\mathrm{d}t \leqslant \|g\|_{\infty,[0,\beta]} \int_0^{+\infty} t^{n+1}\,\mathrm{e}^{-xt}\,\mathrm{d}t = \|g\|_{\infty,[0,\beta]} \frac{(n+1)!}{x^{n+2}}.$$

Ceci prouve que $\displaystyle\int_0^\beta \Big(f(t) - \sum_{k=0}^{n} \frac{a_k}{k!} t^k\Big)\mathrm{e}^{-xt}\,\mathrm{d}t \underset{x\to+\infty}{=} \mathrm{O}\Big(\frac{1}{x^{n+2}}\Big)$.

IV. C. 2) Pour tout $x \in \mathrm{E} \cap]0,+\infty[$ les fonctions $t \mapsto f(t)\mathrm{e}^{-xt}$ et $t \mapsto t^n\,\mathrm{e}^{-xt}$ sont intégrables sur $[0,+\infty[$ et en intégrant on obtient $(\mathrm{L}f)(x) - \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{a_k}{x^{k+1}} = \int_0^{+\infty} g(t)\mathrm{e}^{-xt}\,\mathrm{d}t = \int_\beta^{+\infty} g(t)\mathrm{e}^{-xt}\,\mathrm{d}t + \mathrm{O}\Big(\frac{1}{x^{n+2}}\Big)$, g étant définie à la question précédente.
Soit maintenant $a \in \mathrm{E} \cap]0,+\infty[$. Pour tout $x > a$ on a :

$$\Big|\int_\beta^{+\infty} g(t)\mathrm{e}^{-xt}\,\mathrm{d}t\Big| \leqslant \int_\beta^{+\infty} |g(t)|\mathrm{e}^{-at}\,\mathrm{e}^{-(x-a)t}\,\mathrm{d}t \leqslant \mathrm{e}^{-(x-a)\beta} \int_\beta^{+\infty} |g(t)|\mathrm{e}^{-at}\,\mathrm{d}t \underset{x\to+\infty}{=} \mathrm{O}\Big(\mathrm{e}^{-\beta x}\Big).$$

Puisque $\mathrm{e}^{-\beta x} \underset{+\infty}{=} \mathrm{O}\Big(\dfrac{1}{x^{n+2}}\Big)$ on en déduit que $(\mathrm{L}f)(x) - \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{a_k}{x^{k+1}} = \mathrm{O}\Big(\frac{1}{x^{n+2}}\Big)$.

IV. D – Comportement en 0

IV. D. 1) f est bornée au voisinage de $+\infty$ donc lorsque t tend vers $+\infty$, $f(t)\mathrm{e}^{-xt} = \mathrm{O}(\mathrm{e}^{-xt})$. Puisque $t \mapsto \mathrm{e}^{-xt}$ est intégrable pour tout $x > 0$ on en déduit que $]0,+\infty[\subset \mathrm{E}$.

IV. D. 2) Notons qu'une fonction continue de $\mathbb{R}^+$ dans $\mathbb{R}$ et admettant une limite en $+\infty$ est bornée ; on note $\|f\|_\infty$ la borne supérieure de $|f|$ sur $\mathbb{R}^+$.
On a $x(\mathrm{L}f)(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} x f(t)\mathrm{e}^{-xt}\,\mathrm{d}t = \int_0^{+\infty} f\Big(\frac{u}{x}\Big)\mathrm{e}^{-u}\,\mathrm{d}u$ en posant $u = xt$. Considérons une suite (x_n) de réels positifs convergeant vers 0, et appliquons le théorème de convergence dominée à la suite de fonctions $f_n : u \mapsto f\Big(\dfrac{u}{x_n}\Big)\mathrm{e}^{-u}$:

- les fonctions f_n sont continues par morceaux sur $[0,+\infty[$;
- la suite de fonctions (f_n) converge simplement sur $[0,+\infty[$ vers $u \mapsto \ell\,\mathrm{e}^{-u}$, elle-même continue par morceaux ;
- Pour tout $t \geqslant 0$, $|f_n(u)| \leqslant \|f\|_\infty\,\mathrm{e}^{-u} = \phi(u)$.

ϕ est continue par morceaux et intégrable sur $[0,+\infty[$ donc le théorème s'applique : $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} x_n(\mathrm{L}f)(x_n) = \int_0^{+\infty} \ell\,\mathrm{e}^{-u}\,\mathrm{d}u = \ell$.
Par caractérisation séquentielle on peut conclure : $\displaystyle\lim_{x\to 0^+} x(\mathrm{L}f)(x) = \ell$.

V Étude d'un deuxième exemple

V. A – On sait que l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t}\,\mathrm{d}t$ converge sans être absolument convergente, donc $0 \in \mathrm{E}'$ mais $0 \notin \mathrm{E}$.

V. B – La fonction f est bornée sur $\mathbb{R}^+$ donc $|f(t)|\mathrm{e}^{-xt} \leqslant \|f\|_\infty \mathrm{e}^{-xt}$. Pour tout $x > 0$ la fonction $t \mapsto \mathrm{e}^{-xt}$ est intégrable sur $[0,+\infty[$, donc $]0,+\infty[\subset \mathrm{E}$.
Sachant que E est un intervalle non majoré et que $0 \notin \mathrm{E}$ on en déduit $\mathrm{E} =]0,+\infty[$.

V. C – D'après IV.A on a $(\mathrm{L}f)'(x) = -\displaystyle\int_0^{+\infty} \sin t\,\mathrm{e}^{-xt}\,\mathrm{d}t$. Une double intégration par parties conduit à :

$$-\int_0^{+\infty} \sin t\,\mathrm{e}^{-xt}\,\mathrm{d}t = \Big[\cos t\,\mathrm{e}^{-xt} + x\sin t\,\mathrm{e}^{-xt}\Big]_0^{t\to+\infty} + x^2\int_0^{+\infty} \sin t\,\mathrm{e}^{-xt}\,\mathrm{d}t$$

ce calcul étant justifié par l'existence des limites en $+\infty$. Ainsi, $(\mathrm{L}f)'(x) = -1 - x^2(\mathrm{L}f)'(x)$, soit $(\mathrm{L}f)'(x) = \dfrac{-1}{1+x^2}$.

V. D – On en déduit l'existence d'une constante C tel que pour tout $x > 0$, $(\mathrm{L}f)(x) = \mathrm{C} - \arctan x$.
f admet au voisinage de 0 le développement limité $f(t) \underset{0}{=} 1 + \mathrm{O}(t^2)$ donc d'après IV.C2, $(\mathrm{L}f)(x) \underset{+\infty}{=} \dfrac{1}{x} + \mathrm{O}\Big(\dfrac{1}{x^3}\Big)$.
Mais par ailleurs, $(\mathrm{L}f)(x) = \mathrm{C} - \dfrac{\pi}{2} + \arctan\Big(\dfrac{1}{x}\Big) \underset{+\infty}{=} \mathrm{C} - \dfrac{\pi}{2} + \dfrac{1}{x} + \mathrm{O}\Big(\dfrac{1}{x^3}\Big)$ donc $\mathrm{C} = \dfrac{\pi}{2}$ et $f(x) = \arctan\Big(\dfrac{1}{x}\Big)$ pour tout $x > 0$.

V. E – Le changement de variable $t = n\pi + u$ donne $f_n(x) = (-1)^n\mathrm{e}^{-n\pi x}\displaystyle\int_0^{\pi} \frac{\sin u}{n\pi + u}\mathrm{e}^{-ux}\,\mathrm{d}u$.
On a $0 \leqslant \mathrm{e}^{-(n+1)\pi x} \leqslant \mathrm{e}^{-n\pi x}$ et pour tout $u \in [0,\pi]$, $0 \leqslant \dfrac{\sin u}{(n+1)\pi + u}\mathrm{e}^{-ux} \leqslant \dfrac{\sin u}{n\pi + u}\mathrm{e}^{-ux}$ donc $|f_{n+1}(x)| \leqslant |f_n(x)|$.
De plus, $|f_n(x)| \leqslant \displaystyle\int_0^{\pi} \frac{\mathrm{d}u}{n\pi + u} = \ln\Big(1 + \frac{1}{n}\Big)$ donc $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} |f_n(x)| = 0$. On peut donc appliquer le critère spécial relatif aux séries alternées et affirmer que la série $\sum f_n$ converge simplement sur $[0,+\infty[$ et que $\Big|\displaystyle\sum_{k=n+1}^{+\infty} f_k(x)\Big| \leqslant |f_{n+1}(x)| \leqslant \ln\Big(1 + \frac{1}{n+1}\Big)$.
Cette majoration est uniforme, donc la série $\sum f_n$ converge uniformément sur $[0,+\infty[$.

V. F – Le théorème de continuité des intégrales à paramètre montre sans difficulté que chacune de ces fonctions f_n est continue sur $[0,+\infty[$. Il en résulte que la somme de la série $\sum f_n$ est continue sur $\mathbb{R}^+$. Or cette somme n'est autre que $\mathrm{L}f$, qui est donc continue sur $[0,+\infty[$, et en particulier en 0. Ainsi, $(\mathrm{L}f)(0) = \displaystyle\lim_{x\to 0^+} (\mathrm{L}f)(x) = \lim_{x\to 0^+} \arctan\Big(\frac{1}{x}\Big) = \frac{\pi}{2}$.

VI Injectivité dans le cas typique

VI. A –

VI. A. 1) Par linéarité de l'intégrale on en déduit que pour tout polynôme $\mathrm{P} \in \mathbb{R}[\mathrm{X}]$, $\displaystyle\int_0^1 \mathrm{P}(t)g(t)\,\mathrm{d}t = 0$.

VI. A. 2) Soit (P_n) une suite de polynômes qui converge uniformément vers g sur $[0,1]$.
On a $\Big|\displaystyle\int_0^1 g(t)^2\,\mathrm{d}t - \int_0^1 \mathrm{P}_n(t)g(t)\,\mathrm{d}t\Big| \leqslant \int_0^1 \big|\mathrm{P}_n(t) - g(t)\big| \cdot |g(t)|\,\mathrm{d}t \leqslant \|\mathrm{P}_n - g\|_\infty \int_0^1 |g(t)|\,\mathrm{d}t$.
Puisque $\lim \|\mathrm{P}_n - g\|_\infty = 0$ on en déduit que $\lim \displaystyle\int_0^1 \mathrm{P}_n(t)g(t)\,\mathrm{d}t = \int_0^1 g(t)^2\,\mathrm{d}t$.
D'après la question précédente, on en déduit que $\displaystyle\int_0^1 g(t)^2\,\mathrm{d}t = 0$. Mais la fonction g^2 est continue et positive, donc nulle sur $[0,1]$.

VI. B –

VI. B. 1) $(\mathrm{L}f)(x+a) = \int_0^{+\infty} f(t)\,\mathrm{e}^{-xt}\,\mathrm{e}^{-at}\,\mathrm{d}t = \int_0^{+\infty} h'(t)\,\mathrm{e}^{-at}\,\mathrm{d}t$ d'après le théorème fondamental de l'analyse.
On réalise une intégration par parties :

$$\int_0^{\mathrm{B}} h'(t)\,\mathrm{e}^{-at}\,\mathrm{d}t = \Big[h(t)\,\mathrm{e}^{-at}\Big]_0^{\mathrm{B}} + a\int_0^{\mathrm{B}} h(t)\,\mathrm{e}^{-at}\,\mathrm{d}t = h(\mathrm{B})\,\mathrm{e}^{-a\mathrm{B}} + a\int_0^{\mathrm{B}} h(t)\,\mathrm{e}^{-at}\,\mathrm{d}t.$$

Puisque $x \in \mathrm{E}$ la fonction h possède une limite finie en $+\infty$. On en déduit que $\lim\limits_{\mathrm{B}\to+\infty} h(\mathrm{B})\,\mathrm{e}^{-a\mathrm{B}} = 0$, donc l'intégrale $\int_0^{+\infty} h(t)\,\mathrm{e}^{-at}\,\mathrm{d}t$ converge et $(\mathrm{L}f)(x+a) = a\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-at}\,h(t)\,\mathrm{d}t$.

VI. B. 2) Le changement de variable bijectif $t = -\dfrac{\ln u}{a}$ montre que les intégrales $\int_0^1 u^n h\Big(-\dfrac{\ln u}{a}\Big)\mathrm{d}u$ et $an\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-ant}\,h(t)\,\mathrm{d}t$ ont même nature, et sont égales en cas de convergence. Or la question précédente a montré que cette dernière intégrale converge et vaut $(\mathrm{L}f)(x+na)$, supposée ici nulle, donc $\int_0^1 u^n h\Big(-\dfrac{\ln u}{a}\Big)\mathrm{d}u$ converge et vaut 0.

VI. B. 3) Définissons $g : [0,1] \to \mathbb{R}$ en posant $g(u) = h\Big(-\dfrac{\ln u}{a}\Big)$ si $u \in]0,1]$ et en prolongeant par continuité en posant $g(1) = \lim\limits_{+\infty} h(t) = \int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-xu}\,f(u)\,\mathrm{d}y$.
Ainsi définie cette fonction est continue, et d'après la question VI.A, il s'agit de la fonction nulle. Il en est donc de même de la fonction h.

VI. B. 4) *Attention, en l'état cette question est formulée de manière trop imprécise.* Reformulons-la en considérant deux applications continues f_1 et f_2 continues de $\mathbb{R}^+$ dans $\mathbb{R}$, dont les transformées de Laplace sont définies respectivement sur E_1 et E_2, supposés non vides. On pose $\mathrm{E} = \mathrm{E}_1 \cap \mathrm{E}_2$ et on suppose $\mathrm{L}f_1 = \mathrm{L}f_2$ sur E. Posons $f = f_1 - f_2$ et considérons $x \in \mathrm{E}$ et $a > 0$. On a $\mathrm{L}f = \mathrm{L}f_1 - \mathrm{L}f_2 = 0$ sur E donc l'hypothèse du VI.B.2 est vérifiée. D'après VI.B.3 la fonction h est nulle, soit : $\forall t \geqslant 0,\ \int_0^t \mathrm{e}^{-xu}\,f(u)\,\mathrm{d}u = 0$. h' est aussi la fonction nulle, donc pour tout $t \geqslant 0$, $f(t) = 0$, et $f_1 = f_2$.

VII Étude de la borne inférieure de E

VII. A – Cas positif

VII. A. 1) Supposons $\alpha \notin \mathrm{E}$. L'intégrale $\int_0^{+\infty} f(t)\,\mathrm{e}^{-\lambda(t)x}\,\mathrm{d}t$ diverge, et puisque f est positive, $\lim\limits_{y\to+\infty} \int_0^{y} f(t)\,\mathrm{e}^{-\lambda(t)x}\,\mathrm{d}t = +\infty$.
Pour tout $\mathrm{M} \in \mathbb{R}$ il existe donc $\mathrm{B} > 0$ tel que $\int_0^{\mathrm{B}} f(t)\,\mathrm{e}^{-\lambda(t)x}\,\mathrm{d}t \geqslant 2\mathrm{M}$.

Puisque l'intervalle d'intégration est un segment, il est facile de montrer que la fonction $x \mapsto \int_0^{\mathrm{B}} f(t)\,\mathrm{e}^{-\lambda(t)x}\,\mathrm{d}t$ est continue sur $[\alpha,+\infty[$ (il suffit d'utiliser la fonction dominante $\phi(t) = f(t)\,\mathrm{e}^{-\lambda(t)\alpha}$).
Ainsi, par continuité il existe $\eta > 0$ tel que pour tout $x \in]\alpha,\alpha+\eta]$, $\int_0^{\mathrm{B}} f(t)\,\mathrm{e}^{-\lambda(t)x}\,\mathrm{d}t \geqslant \mathrm{B}$.
Puisque f est positive, on a a fortiori $\mathrm{L}f(x) = \int_0^{+\infty} f(t)\,\mathrm{e}^{-\lambda(t)x}\,\mathrm{d}t \geqslant \mathrm{B}$.
Ceci montre que $\lim\limits_{x\to\alpha^+} \mathrm{L}f(x) = +\infty$, autrement dit que $\mathrm{L}f$ n'est pas bornée, ce qui est contraire aux hypothèses. On en déduit que $\alpha \in \mathrm{E}$.

VII. A. 2) Puisque f est à valeurs positives, on a $x \leqslant y \implies \forall t \geqslant 0,\ f(t)\,\mathrm{e}^{-\lambda(t)y} \leqslant f(t)\,\mathrm{e}^{-\lambda(t)x}$ donc pour $x \leqslant y$ dans E, $(\mathrm{L}f)(y) \leqslant (\mathrm{L}f)(x)$. Ainsi, la fonction $\mathrm{L}f$ est décroissante sur E. Elle admet donc en α une limite, finie ou égale à $+\infty$.
Mais puisque $\alpha \notin \mathrm{E}$, la fonction $\mathrm{L}f$ ne peut être bornée d'après la question précédente, et ainsi $\lim\limits_{x\to\alpha^+} \mathrm{L}f(x) = +\infty$.

VII. B – On a ici $(\mathrm{L}f)(x) = \int_0^{+\infty} \dfrac{\cos t}{(1+t)^x}\,\mathrm{d}t$ quand $x \in \mathrm{E}'$.

VII. B. 1) Lorsque $x > 1$ on a $\left|\dfrac{\cos t}{(1+t)^x}\right| \leqslant \dfrac{1}{(1+t)^x}$ et $t \mapsto \dfrac{1}{(1+t)^x}$ est intégrable donc $]1,+\infty[\subset \mathrm{E}$.
Lorsque $x = 1$ on montre, à l'instar de l'intégrale de Dirichlet, que $\int_0^{+\infty} \dfrac{\cos t}{1+t}\,\mathrm{d}t$ est convergente sans être absolument convergente, donc $1 \notin \mathrm{E}$ et ainsi $\mathrm{E} =]1,+\infty[$ car E est un intervalle.

VII. B. 2) Une intégration par parties donne : $\displaystyle\int_0^{\mathrm{B}} \frac{\cos t}{(1+t)^x}\,\mathrm{d}t = \frac{\sin \mathrm{B}}{(1+\mathrm{B})^x} + x\int_0^{\mathrm{B}} \frac{\sin t}{(1+t)^{x+1}}\,\mathrm{d}t$.

On a $\displaystyle\left|\frac{\sin t}{(1+t)^{x+1}}\right| \leqslant \frac{1}{(1+t)^{x+1}}$ donc lorsque $x > 0$ on a $\displaystyle\lim_{\mathrm{B}\to+\infty} \frac{\sin \mathrm{B}}{(1+\mathrm{B})^x} = 0$ et l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{(1+t)^{x+1}}\,\mathrm{d}t$ converge absolument donc l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\cos t}{(1+t)^x}\,\mathrm{d}t$ converge. Ainsi, $]0,+\infty[\, \subset \mathrm{E}'$.

Supposons maintenant $x \leqslant 0$ et raisonnons par l'absurde en supposant la convergence de l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\cos t}{(1+t)^x}\,\mathrm{d}t$.

Dans ce cas, on a $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \int_{2n\pi}^{2n\pi+\frac{\pi}{2}} \frac{\cos t}{(1+t)^x}\,\mathrm{d}t = 0$.

Mais $\displaystyle\int_{2n\pi}^{2n\pi+\frac{\pi}{2}} \frac{\cos t}{(1+t)^x}\,\mathrm{d}t = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos t}{(1+2n\pi+t)^x}\,\mathrm{d}t \geqslant \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos t\,\mathrm{d}t = 1$ car $\displaystyle\frac{1}{(1+2n\pi+t)^x} \geqslant 1$ pour $x \leqslant 0$.

Ceci est absurde donc l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\cos t}{(1+t)^x}\,\mathrm{d}t$ diverge et $x \notin \mathrm{E}'$. Ainsi, $\mathrm{E}' = \,]0,+\infty[$.

VII. B. 3) On voudrait montrer que $\displaystyle\lim_{x\to1^+} (\mathrm{L}f)(x) = (\mathrm{L}f)(1)$ mais comme $1 \notin \mathrm{E}$ il ne peut être question d'utiliser sous cette forme le théorème de convergence dominée puisque $(\mathrm{L}f)(1)$ est une intégrale semi-convergente.
On transforme donc $(\mathrm{L}f)(x)$ à l'aide d'une intégration par parties :

$$\int_0^{\mathrm{B}} \frac{\cos t}{(1+t)^x}\,\mathrm{d}t = \left[\frac{\sin t}{(1+t)^x}\right]_0^{\mathrm{B}} + x\int_0^{\mathrm{B}} \frac{\sin t}{(1+t)^{x+1}}\,\mathrm{d}t$$

qui donne en passant à la limite $\displaystyle(\mathrm{L}f)(x) = x\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{(1+t)^{x+1}}\,\mathrm{d}t$.

Considérons maintenant une suite (x_n) de réels de $]1,+\infty[$ qui converge vers 1, et notons $\displaystyle f_n(t) = \frac{\sin t}{(1+t)^{x_n+1}}$.

Ces fonctions sont continues par morceaux sur $[0,+\infty[$, la suite (f_n) converge simplement sur $[0,+\infty[$ vers $\displaystyle t \mapsto \frac{\sin t}{(1+t)^2}$, elle-même continue par morceaux, et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\displaystyle|f_n(t)| \leqslant \frac{1}{(1+t)^2} = \phi(t)$.

La fonction ϕ est continue par morceaux et intégrable sur $[0,+\infty[$ donc le théorème de convergence dominée s'applique, et $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{(1+t)^{x_n+1}}\,\mathrm{d}t = \int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{(1+t)^2}\,\mathrm{d}t$.

Par caractérisation séquentielle on end déduit que $\displaystyle\lim_{x\to1^+} (\mathrm{L}f)(x) = \int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{(1+t)^2}\,\mathrm{d}t = (\mathrm{L}f)(1)$.