Corrigé : étude de certaines matrices symplectiques (Centrale PC 2020)

I Cas des matrices de taille 2×2

Q 1. Un calcul par blocs donne $J_n^2 = -I_{2n}$. On a $J_n^T = -J_N$ donc $J_n \in \mathcal{A}_n(\mathbb{R})$, et $J_n^T J_n J_n = -J_n^3 = J_n$ donc $J_n \in Sp_{2n}(\mathbb{R})$.

Q 2. Posons $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$; on calcule $M^T J_1 M = (ad - bc)J_2$, donc $M \in Sp_2(\mathbb{R})$ si et seulement si $\det M = 1$.

Q 3. M est orthogonale donc $\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \epsilon \begin{pmatrix} -x_2 \\ x_1 \end{pmatrix}$, avec $\epsilon = \det M$.

On a $J_1 M_1 = \begin{pmatrix} x_2 \\ -x_1 \end{pmatrix}$ et d'après la question précédente, $M \in Sp_2(\mathbb{R})$ si et seulement si $\epsilon = 1$, soit $M_2 = -J_1 M_1$.

Q 4. Posons $X_1 = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$, et $M = \begin{pmatrix} x_1 & -x_2 \\ x_2 & x_1 \end{pmatrix}$. M est orthogonale car ses deux colonnes sont orthogonales et de norme 1, et elle est symplectique d'après la question précédente.

Q 5. Une matrice symétrique réelle est diagonalisable dans une base orthonormée directe : il existe $P \in \mathcal{SO}_2(\mathbb{R})$ et $D = \mathrm{diag}(\lambda, \mu)$ telles que $M = PDP^T$. Puisque M est symplectique on a $\det M = 1$ (question 2), donc $\det D = 1$. Autrement dit, $\lambda\mu = 1$. Et puisque $P \in \mathcal{SO}_2(\mathbb{R})$ on a $\det P = 1$, ce qui montre que P est aussi symplectique.

Remarque. Il est toujours possible de diagonaliser une matrice symétrique dans une base orthonormée *directe*, car si $\det P = -1$ il suffit de remplacer une de ses colonnes par son opposé pour obtenir une base orthonormée directe.

Q 6. Une matrice antysymétrique et symplectique est de la forme $M = \begin{pmatrix} 0 & a \\ -a & 0 \end{pmatrix}$ avec $a^2 = 1$. On a $\chi_M(x) = x^2 + a^2$ donc $\mathrm{sp}_{\mathbb{R}}(M) = \varnothing$ et M n'est pas diagonalisable.

II Cas des matrices symplectiques et orthogonales

Q 7. On a $\varphi(\lambda X_1 + X_2, Y) = (\lambda X_1 + X_2)^T KY = \lambda X_1^T KY + X_2^T KY = \lambda\varphi(X_1, Y) + \varphi(X_2, Y)$ et de même $\varphi(X, \lambda Y_1 + Y_2) = \lambda\varphi(X, Y_1) + \varphi(X, Y_2)$ donc φ est bilinéaire.

Q 8. On a $\varphi(X,X)^T = (X^T KX)^T = X^T K^T X = -X^T KX = -\varphi(X,X)$. Mais $\varphi(X,X) \in \mathbb{R}$ donc $\varphi(X,X)^T = \varphi(X,X)$ et $\varphi(X,X) = 0$. De même, $\varphi(Y,X) \in \mathbb{R}$ donc $\varphi(Y,X) = \varphi(Y,X)^T = (Y^T KX)^T = X^T K^T Y = -X^T KY = -\varphi(X,Y)$ donc φ est symétrique.

Q 9. Posons $X = \begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \end{pmatrix}$ et $Y = \begin{pmatrix} Y_1 \\ Y_2 \end{pmatrix}$ avec $X_1, X_2, Y_1, Y_2 \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$. Un calcul par blocs donne $\varphi(X,Y) = X_1^T Y_2 - X_2^T Y_1$. Or $X_1^T Y_2 = \sum_{k=1}^{n} x_k y_{n+k}$ et $X_2^T Y_1 = \sum_{k=1}^{n} x_{n+k} y_k$ donc $\varphi(X,Y) = \sum_{k=1}^{n} (x_k y_{n+k} - x_{n+k} y_k)$.

Q 10. On en déduit que $\varphi(e_i, e_j) = \sum_{k=1}^{n} (\delta_{k,i}\delta_{k+n,j} - \delta_{k+n,i}\delta_{k,j}) = \delta_{i+n,j} - \delta_{j+n,i}$.

Q 11. Avec les notations par blocs de la question 9 on a $X = \begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \end{pmatrix}$ et $J_n X = \begin{pmatrix} X_2 \\ -X_1 \end{pmatrix}$ donc $X^T J_n X = X_1^T X_2 - X_2^T X_1$. Mais par symétrie du produit scalaire canonique on a $X_2^T X_1 = X_1^T X_2$ donc $X^T J_n X = 0$ et X et $J_n X$ sont orthogonaux.
On calcule $\varphi(J_n X, X) = X^T J_n J_n X = -X^T X = -\|X\|^2$ car $J_n^2 = -I_{2n}$.

Q 12. $Z \in X^{J_n} \iff \varphi(X,Z) = 0 \iff X^T J_n Z = 0 \iff -(J_n X)^T Z = 0 \iff Z \in (J_n X)^\perp$ donc $X^{J_n} = (J_n X)^\perp$.

Q 13. P est orthogonale donc $\|X_i\| = 1$ et $i \neq j \implies X_i \perp X_j$.
Le coefficient de rang (i,j) du produit $P^T J_n P$ vaut $X_i^T J_n X_j$ mais puisque P est symplectique, $P^T J_n P = J_n$, matrice donc le coefficient de rang (i,j) vaut $\delta_{i+n,j} - \delta_{i,j+n}$. On a donc bien $\varphi(X_i, X_j) = \delta_{i+n,j} - \delta_{i,j+n}$.

Q 14. Puisque P est orthogonale, l'égalité $P^T J_n P = J_n$ s'écrit aussi $J_n P = PJ_n$. Si on pose $P = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}$ alors $J_n P = \begin{pmatrix} C & D \\ -A & -B \end{pmatrix}$ et $PJ_n = \begin{pmatrix} -B & A \\ -D & C \end{pmatrix}$ donc $D = A$ et $C = -B$ et $P = \begin{pmatrix} A & B \\ -B & A \end{pmatrix}$.
Ainsi, si $X_i = \begin{pmatrix} Z_1 \\ Z_2 \end{pmatrix}$ alors $X_{i+n} = \begin{pmatrix} -Z_2 \\ Z_1 \end{pmatrix} = -J_n X_i$. D'après la question 12 on a alors $X_i^{J_n} = (J_n X_i)^\perp = X_{i+n}^\perp$.

Q 15. Nous avons montré cette égalité à la question précédente.

III Quelques généralités sur les matrices symplectiques

Q 16. Soit $M \in Sp_{2n}(\mathbb{R})$. On a $M^T J_n M = J_n$ donc $(\det M)^2 \det J_n = \det J_n$. On a $\mathrm{rg}(J_n) = 2n$ donc $\det J_n \neq 0$ et $(\det M)^2 = 1$.

Q 17. Sachant que $(M^T)^{-1} = (M^{-1})^T$ on a $M^T J_n M = J_n \iff J_n = (M^{-1})^T J_n M^{-1}$ donc si M est symplectique, M^{-1} aussi.

Q 18. Si M et N sont symplectiques alors $(MN)^T J_n (MN) = N^T (M^T J_n M) N = N^T J_n N = J_n$ donc MN est symplectique.
La matrice nulle n'est pas symplectique donc $Sp_{2n}(\mathbb{R})$ n'est pas un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_{2n}(\mathbb{R})$.

IV Réduction des matrices symétriques et symplectiques

IV.A – Propriété

Q 19. Soit $X \in \mathcal{M}_{2n}(\mathbb{R})$, $X \neq 0$ tel que $MX = \lambda X$. On a $J_n X = M J_n M X = M J_n (\lambda X) = \lambda M(J_n X)$.

On a vu (question 16) que M est inversible donc $\lambda \neq 0$ et ainsi, $M(J_n X) = \dfrac{1}{\lambda} J_n X$. La matrice J_n est inversible donc $J_n X \neq 0$; c'est donc un vecteur propre de M pour la valeur propre $1/\lambda$.

Q 20. D'après la question précédente on peut définir une application linéaire $u : E_\lambda \to E_{1/\lambda}$ en posant $u(X) = J_n X$. Puisque J_n est inversible cette application est injective.
En appliquant ce qui précède à la valeur propre $1/\lambda$ on définit de même l'application linéaire injective $v : E_{1/\lambda} \to E_\lambda$ en posant $v(X) = J_n X$.
Puisque $J_n^2 = -I_{2n}$ on a $v \circ u = -\mathrm{Id}_{E_\lambda}$ et $u \circ v = -\mathrm{Id}_{E_{1/\lambda}}$ donc u est un isomorphisme, avec $u^{-1} = -v$. On en déduit que $\dim(E_\lambda) = \dim(E_{1/\lambda})$ et que l'image par u d'une base de E_λ est une base de $E_{1/\lambda}$.

Q 21. Soit $Y \in \mathrm{Vect}(Y_1, \dots, Y_p, J_n Y_1, \dots, J_n Y_p)^\perp$. Alors pour tout $i \in [\![1, p]\!]$, $Y^T Y_i = 0$ et $Y^T (J_n Y_i) = 0$.
Sachant que $J_n^T J_n = I_{2n}$ la première égalité s'écrit $Y^T J_n^T J_n Y_i = 0$ soit $(J_n Y)^T (J_n Y_i) = 0$.
Sachant que $J_n = -J_n^T$ la seconde s'écrit $(J_n^T Y)^T Y_i = 0$ soit $(J_n Y)^T Y_i = 0$.
On a donc montré que $J_n Y \in \mathrm{Vect}(Y_1, \dots, Y_p, J_n Y_1, \dots, J_n Y_p)^\perp$. Il reste à prouver que $J_n Y$ est orthogonal à Y. Pour cela on poser $Y = \begin{pmatrix} Z_1 \\ Z_2 \end{pmatrix}$ avec $Z_1, Z_2 \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$. Alors $J_n Y = \begin{pmatrix} Z_2 \\ -Z_1 \end{pmatrix}$ et $Y^T J_n Y = Z_1^T Z_2 - Z_2^T Z_1 = 0$ par symétrie du produit scalaire canonique.

Q 22. Dans cette question on suppose que 1 est valeur propre de M. Soit donc X_1 un vecteur propre de norme 1 ; d'après la question 19, $J_n X_1$ est un vecteur propre, lui aussi de norme 1 et orthogonal à X_1. En effet, $(J_n X_1)^T (J_n X_1) = X1^T J_n^T J_n X_1 = X_1^T X_1 = 1$ car $J_n^T J_n = I_{2n}$ et $X_1^T J_n X_1 = 0$ (démontré à la question précédente). Ainsi, $(X_1, J_n X_1)$ est une famille orthonormée incluse dans E_1, qui est donc de dimension au moins égale à 2.
Supposons maintenant avoir construit une famille orthonormée $(X_1, \cdots, X_k, J_n X_1, \cdots, J_n X_k)$ incluse dans E_1, et supposons l'espace vectoriel qu'ils engendrent strictement inclus dans E_1. Soit alors $X_{k+1} \in E_1$ un vecteur de norme 1 orthogonal à chacun de ces vecteurs. D'après la question précédente, la famille $(X_1, \dots, X_{k+1}, J_n X_1, \dots, J_n X_{k+1})$ est une famille orthonormée incluse dans E_1, qui est donc de dimension au moins égale à $2k + 2$.
E_1 étant de dimension finie, ce processus constructif a une fin et montre que E_1 est de dimension paire et possède une base orthonormée de la forme souhaitée.

Q 23. La seule propriété utilisée dans la question précédente est que $1/\lambda\lambda$. C'est vrai pour $\lambda = 1$, mais aussi pour $\lambda = -1$. La situation est donc identique pour E_{-1}.

Q 24. Notons $\lambda_1, \dots, \lambda_k$ les valeurs propres vérifiant $|\lambda_i| > 1$. D'après la question 19 les valeurs propres de M sont $\lambda_1, \dots, \lambda_p, 1/\lambda_1, \dots, 1/\lambda_p$, plus éventuellement 1 et -1.

D'après la question 22 on peut décomposer E_1 sous la forme $E_1 = H_1 \overset{\perp}{\oplus} H_2$ où $H_1 = \mathrm{Vect}(X_1, \dots, X_p)$ et $H_2 = \mathrm{Vect}(-J_n X_1, \dots, -J_n X_p)$ (avec les notations de la question 22). On fait de même pour $E_{-1} = H'_1 \overset{\perp}{\oplus} H'_2$.
Pour chacun des sous-espaces propres E_{λ_i} on choisit une base orthonormée $(Y_1, \dots, Y_q)$; d'après la question 20 la famille $(-J_n Y_1, \dots, -J_n Y_q)$ est une base orthonormée de E_{1/λ_i}.

D'après le théorème spectral, $E = H_1 \overset{\perp}{\oplus} H'_1 \overset{\perp}{\oplus} E_{\lambda_1} \overset{\perp}{\oplus} \cdots \overset{\perp}{\oplus} E_{\lambda_k} \overset{\perp}{\oplus} H_2 \overset{\perp}{\oplus} H'_2 \overset{\perp}{\oplus} E_{1/\lambda_1} \overset{\perp}{\oplus} \cdots \overset{\perp}{\oplus} E_{1/\lambda_k}$ et en mettant bout-à-bout les bases décrites plus haut on obtient une matrice $P \in \mathcal{O}_{2n}(\mathbb{R})$ telle que $P^T M P = \mathrm{diag}(d_1, \dots, d_{2n})$ avec $d_{n+k} = 1/d_k$.
Enfin, les colonnes $Z_1, \dots, Z_{2n}$ de P vérifient $Z_{i+n} = -J_n Z_i$ donc d'après la partie II P est une matrice symplectique.

IV. B – Mise en application sur un exemple

Q 25. Notons $A = \begin{pmatrix} B & C \\ C & B \end{pmatrix}$ avec $B = \frac{1}{8}\begin{pmatrix} 9 & 1 \\ 1 & 9 \end{pmatrix}$ et $C = \frac{1}{8}\begin{pmatrix} 3 & 3 \\ 3 & 3 \end{pmatrix}$.

B et C sont symétriques donc A aussi, et $A^T J_n A = A\begin{pmatrix} C & B \\ -B & -C \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} BC - CB & B^2 - C^2 \\ C^2 - B^2 & CB - BC \end{pmatrix}$.

Posons $U = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$. On a $B = I + \frac{1}{8}U$ et $C = \frac{3}{8}U$ et sachant que $U^2 = 2U$ on calcule $B^2 = I + \frac{9}{32}U$, $C^2 = \frac{9}{32}U$ et $BC = CB$ donc $A^T J_n A = \begin{pmatrix} O & I \\ -I & O \end{pmatrix} = J_n$ donc A est symplectique.

Q 26. Posons $X_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ et $X_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$. On observe que $AX_1 = X_1$ et $AX_2 = 2X_2$ donc en posant $X_3 = J_2 X_1$ et $X_4 = J_2 X_2$ on a $AX_3 = X_3$ et $AX_4 = \frac{1}{2}X_4$. Il reste à normaliser ces vecteurs : on pose $P = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \in \mathcal{O}_4(\mathbb{R}) \cap \mathrm{Sp}_4(\mathbb{R})$ et alors

$$P^T A P = \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & 2 & & \\ & & 1 & \\ & & & 1/2 \end{pmatrix}$$

V Étude du cas des matrices antisymétriques

V. A – Un peu de théorie

Q 27. Soit λ une valeur propre réelle d'une matrice antisymétrique M, et X un vecteur propre associé. On a $MX = \lambda X$ et $X^T M^T = \lambda X^T$ soit $X^T M = -\lambda X^T$. On en déduit que $X^T(MX) = \lambda X^T X = \lambda \|X\|^2$ et $(X^T M)X = -\lambda X^T X = -\lambda\|X\|^2$, et puisque $\|X\| \neq 0$, nécessairement $\lambda = 0$.
Mais si de plus M est symplectique alors $\det M \neq 0$ (question 16) donc 0 ne peut être valeur propre. On en déduit que $\mathrm{sp}_{\mathbb{R}}(M) = \varnothing$.

Q 28. La matrice M^2 est symétrique car $(M^2)^T = (M^T)^2 = (-M)^2 = M^2$ donc il suffit d'appliquer le résultat démontré dans la partie IV.

Q 29. $M^2(MX) = M(M^2 X) = \lambda MX$ et puisque M est inversible, MX est vecteur propre pour la valeur propre λ.
D'après la question 19, $J_n X$ et $J_n MX$ sont des vecteurs propres pour la valeur propre $1/\lambda$.

Q 30. Notons tout d'abord que puisque M est symplectique et antisymétrique, $MJ_nM = -J_n$ donc $M^{-1}J_n = -J_n M$.
On a :

- $MX \in F$;
- $M(MX) = M^2 X = \lambda X \in F$;
- $M^2(MJ_n X = \frac{1}{\lambda}J_n X$ donc $M(J_n X) = \frac{1}{\lambda}M^{-1}J_n X = -\frac{1}{\lambda}J_n MX \in F$;
- $M(J_n MX) = -J_n X \in F$

donc F est stable par M.
On a :

- $J_n X \in F$;
- $J_n(MX) \in F$;
- $J_n(J_n X) = -X \in F$;
- $J_n(J_n MX) = -MX \in F$

donc F est stable par J_n.

Q 31. Soit λ une valeur propre de M^2, X un vecteur propre associé. On a $M^2 X = \lambda X$ donc $\lambda\|X\|^2 = X^T M^2 X = -X^T M^T MX = -\|MX\|^2 \leqslant 0$ donc $\lambda \leqslant 0$, et puisque M est inversible, $\lambda < 0$.

Q 32. Puisque M n'a pas de valeur propre la famille (X, MX) est libre dans E_λ. Puisque J_n est inversible, la famille (J_nX, J_nMX) est libre dans $E_{1/\lambda}$. Si $\lambda \neq 1$ alors $\lambda \neq 1/\lambda$ donc la famille (X, MX, J_nX, J_nMX) est libre et $\dim F = 4$.
Montrons maintenant que cette famille est orthogonale : $\langle MX \mid X\rangle = X^T M^T X = -X^T MX = -\langle X \mid MX\rangle$ donc (X, MX) est orthogonale.
$\langle J_nMX \mid J_nX\rangle = X^T M^T J_n^T J_n X = X^T MX = \langle X \mid MX\rangle = 0$ donc (J_nX, MJ_nX) est orthogonale.
Les sous-espaces propres E_λ et $E_{1/\lambda}$ sont orthogonaux donc la famille (X, MX, J_nX, J_nMX) est orthogonale.
Enfin, $\|MX\|^2 = X^T M^T MX = -X^T M^2 X = -\lambda X^T X = -\lambda$, $\|J_nX\|^2 = X^T J_n^T J_n X = X^T X = 1$, $\|J_nMX\|^2 = \|MX\|^2 = 1$ donc la famille $\left(X, \frac{-1}{\sqrt{-\lambda}}MX, -J_nX, \frac{1}{\sqrt{-\lambda}}J_nMX\right)$ est orthonormée, et dans cette base, la matrice de m_F est

$$\begin{pmatrix} 0 & \sqrt{-\lambda} & 0 & 0 \\ -\sqrt{-\lambda} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1/\sqrt{-\lambda} \\ 0 & 0 & -1/\sqrt{-\lambda} & 0 \end{pmatrix}$$

Q 33. Soit $Y \in F^\perp$. Alors $(MY)^T X = -Y^T(MX) = 0$, $(MY)^T(MX) = -Y^T M^2 X = -\lambda Y^T X = 0$, $(MY)^T(J_nX) = -Y^T MJ_n X = \frac{1}{\lambda}Y^T(J_nMX) = 0$ et $(MY)^T(J_nMX) = -Y^T MJ_nMX = Y^T(J_nX) = 0$ donc $MY \in F^\perp$.
De même, $(J_nY)^T X = Y^T(J_nX) = 0$, $(J_nY)^T(MX) = Y^T(J_nMX) = 0$, $(J_nY)^T(J_nX) = Y^T X = 0$ et $(J_nY)^T(J_nMX) = Y^T(MX) = 0$ donc $J_nY \in F^\perp$.
$F^\perp$ est bien stable par M et par J_n.

Q 34. Notons $\lambda_1, \dots, \lambda_p$ les valeurs propres de M^2 qui sont strictement inférieures à -1. On sait que $E = E_{-1} \overset{\perp}{\oplus} E_{\lambda_1} \overset{\perp}{\oplus} E_{1/\lambda_1} \overset{\perp}{\oplus} \cdots \overset{\perp}{\oplus} E_{\lambda_p} \overset{\perp}{\oplus} E_{1/\lambda_p}$.
On a vu à la question Q23 que E_{-1} possède une base orthonormée de la forme $(X_1, \dots, X_k, J_nX_1, \dots, J_nX_k)$. On pose $F_1 = \mathrm{Vect}(X_1, -J_nX_1), \dots, F_k = \mathrm{Vect}(X_k, -J_nX_k)$.
On a $\dim F_i = 2$ et la matrice de m_{F_i} dans cette base est J_1.
Passons à $H = (F_1 \overset{\perp}{\oplus} \cdots \overset{\perp}{\oplus} F_k)^\perp = E_{\lambda_1} \overset{\perp}{\oplus} E_{1/\lambda_1} \overset{\perp}{\oplus} \cdots \overset{\perp}{\oplus} E_{\lambda_p} \overset{\perp}{\oplus} E_{1/\lambda_p}$.
On choisit un vecteur propre $X \in H$ de norme 1, et on réalise la construction de F_{k+1} comme décrit dans les questions précédentes. On a ici $\dim F_{k+1} = 4$ et la matrice de $m_{F_{k+1}}$ dans cette base est de la forme requise d'après les questions précédentes.
Si $F_{k+1} \subsetneq H$ on recommence avec $H \cap F_{k+1}^\perp$, toujours stable par M et J_n d'après la question 33.

V.B – Mise en application

Q 35. On calcule $B\begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-2\\2\\-2\\2\end{pmatrix}$ puis $B^2\begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-4\\-4\\-4\\-4\end{pmatrix}$.

Q 36. Ceci montre que $X = \frac{1}{2}\begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\end{pmatrix}$ est vecteur propre de norme 1 pour la valeur propre -4.

On applique la question 32 : on calcule $\frac{-1}{2}BX = \frac{1}{2}\begin{pmatrix}1\\-1\\1\\-1\end{pmatrix}$, $-J_2X = \frac{1}{2}\begin{pmatrix}-1\\-1\\1\\1\end{pmatrix}$, $\frac{1}{2}J_2BX = \frac{1}{2}\begin{pmatrix}-1\\1\\1\\-1\end{pmatrix}$.

Si on pose $P = \frac{1}{2}\begin{pmatrix}1 & 1 & -1 & -1\\ 1 & -1 & -1 & 1\\ 1 & 1 & 1 & 1\\ 1 & -1 & 1 & -1\end{pmatrix}$ on a $P \in \mathcal{O}_4(\mathbb{R}) \cap \mathrm{Sp}_4(\mathbb{R})$ et $P^T BP = \begin{pmatrix}0 & 2 & 0 & 0\\ -2 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1/2\\ 0 & 0 & -1/2 & 0\end{pmatrix}$.