Corrigé : CC INP PC 2020

EXERCICE 2
Extremums d'une forme quadratique sur la boule unité fermée

Partie I – Étude d'un exemple

Q11. B_2 est fermée et bornée et f est continue, donc f est bornée et atteint ses bornes sur B_2.

Q12. Soit $\phi : t \mapsto f(\cos t, \sin t) = 1 + 2\sin(2t)$. On a $\max\limits_{S_2} f = \max\limits_{[0,2\pi]} \phi = 3$ et $\min\limits_{S_2} f = \min\limits_{[0,2\pi]} \phi = -1$.

Q13. À l'évidence f possède sur B_2 des dérivées partielles continues $\partial_1 f : (x_1, x_2) \mapsto 2x_1 + 4x_2$ et $\partial_2 f : (x_1, x_2) \mapsto 2x_2 + 4x_1$ donc f est de classe $\mathscr{C}^1$.
Les points critiques sur B_2' vérifient $\begin{cases} x_1 + 2x_2 = 0 \\ x_2 + 2x_1 = 0 \end{cases} \iff x_1 = x_2 = 0$ donc le seul point critique est $(0,0)$.

Q14. Les extremums de f sur B_2 sont soit des points critiques de B_2', soit se trouvent à la frontière S_2 de B_2. Sachant que $f(0,0) = 0$ et que $-1 < 0 < 3$ on en déduit que $\max\limits_{B_2} f = 3$ et $\min\limits_{B_2} f = -1$.

Q15. $M_f = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ et $\chi_{M_f}(x) = (x-1)^2 - 4 = x^2 - 2x - 3 = (x+1)(x-3)$ donc $\mathrm{Sp}(M_f) = \{-1, 3\}$.

Partie II – Le cas général

Q16. $X^T M_f X = \sum\limits_{i=1}^{n} [X^T]_{1i}[M_f X]_{i1} \sum\limits_{i=1}^{n} x_i \Big(\sum\limits_{j=1}^{n} [M_f]_{ij} x_j\Big) = \sum\limits_{i=1}^{n}\sum\limits_{j=1}^{n} m_{ij} x_i x_j = \sum\limits_{i,j} m_{ij} x_i x_j$.
Sachant que M_f est symétrique, $X^T M_f X = \sum\limits_{i=1}^{n} m_{ii} x_i^2 + 2\sum\limits_{i<j} m_{ij} x_i x_j = \sum\limits_{i=1}^{n} a_{ii} x_i^2 + \sum\limits_{i<j} a_{ij} x_i x_j = \sum\limits_{i \leqslant j} a_{ij} x_i x_j = f(x)$.

Q17. M_f est symétrique réelle donc diagonalisable dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

Q18. $X^T X = (PY)^T(PY) = Y^T p^T PY = Y^T Y$ car $P^T = P^{-1}$ (P est orthogonale). Et bien entendu $X^T X = \sum\limits_{k=1}^{n} x_k^2 = \|x\|^2$.

Q19. $Y^T DY = \sum\limits_{k=1}^{n} \lambda_k y_k^2$ et $\lambda_1 \leqslant \lambda_k \leqslant \lambda_n$ donc $\lambda_1 \|y\|^2 \leqslant Y^T DY \leqslant \lambda_n \|y\|^2$.
Lorsque $x \in B_n$, $\|y\|^2 = Y^T Y = X^T X = \|x\|^2 \leqslant 1$, donc $\lambda_n > 0 \Rightarrow \lambda_n \|x\|^2 \leqslant \lambda_n$ et $\lambda_1 < 0 \Rightarrow \lambda_1 \leqslant \lambda_1 \|x\|^2$. Ainsi, $\lambda_1 \leqslant Y^T DY \leqslant \lambda_n$.
Par ailleurs, $f(x) = X^T M_f X = X^T PDP^T X = (P^T X)^T D(P^T X) = (P^{-1}X)^T D(P^{-1}X) = Y^T DY$ donc $\lambda_1 \leqslant f(x) \leqslant \lambda_n$.

Q20. Soit x un vecteur propre de norme 1 pour la valeur propre λ_1. Alors $f(x) = X^T M_f X = \lambda_1 X^T X = \lambda_1 \|x\|^2 = \lambda_1$. D'après la question précédente, $\lambda_1 = \min\limits_{B_n} f$. De même, si x est un vecteur propre de norme 1 pour la valeur propre λ_n alors $f(x) = X^T M_f X = \lambda_n X^T X = \lambda_n \|x\|^2 = \lambda_n$ et d'après la question précédente, $\lambda_n = \max\limits_{B_n} f$.

Q21. Lorsque $\lambda_1 \geqslant 0$ On a toujours $\lambda_1 \|y\|^2 \leqslant Y^T DY \leqslant \lambda_n \|y\|^2$ et *a fortiori* $0 \leqslant Y^T DY \leqslant \lambda_n \|y\|^2$. Comme précédemment on en déduit que pour $x \in B_n$, $0 \leqslant f(x) \leqslant \lambda_n$. Sachant que $f(0) = 0$ on en déduit que $\min\limits_{B_n} f = 0$ et $\max\limits_{B_n} f = \lambda_n$.

Partie III – Application des résultats

Q22. On a $m_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{si } i = j \\ -1 & \text{sinon} \end{cases}$ donc $\mathrm{M}_f = 2\mathrm{I}_n - \mathrm{U}$ où U est la matrice qui ne comprend que des 1.
U est symétrique réelle donc diagonalisable ; $\mathrm{rg}(\mathrm{U}) = 1$ donc 0 est valeur propre d'ordre $n-1$. Enfin $\mathrm{tr}(\mathrm{U}) = n$ donc la dernière des valeurs propres est égale à n.
On en déduit que U est semblable à $\mathrm{diag}(0, \dots, 0, n)$ donc que M_f est semblable à $\mathrm{diag}(2, \dots, 2, 2-n)$.
On a $\lambda_1 = 2 - n < 0 < 2 = \lambda_n$ donc $\min\limits_{\mathrm{B}_n} f = 2 - n$ et $\max\limits_{\mathrm{B}_n} f = 2$.