# Polynômes et nombres de Bernoulli

Durée : 4 heures

---

Dans la première partie de ce problème, on définit les polynômes de Bernoulli afin de calculer les sommes $\sum_{k=1}^{p} k^n$ pour deux entiers $p$ et $n$ donnés. Dans la deuxième partie de ce problème, on introduit les nombres de Bernoulli afin d'exprimer les sommes $\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^{2n}}$ pour tout entier $n \geqslant 1$. Enfin, la troisième partie de ce problème prouve que la somme obtenue pour $n = 1$ est irrationnelle. La troisième partie peut être traitée indépendamment des deux premières.

Dans tout le problème on conviendra de confondre polynôme et fonction polynomiale associée.

## Partie I. Polynômes de Bernoulli

Dans l'espace $\mathbb{R}[X]$ des polynômes à coefficients réels, on considère le sous-espace vectoriel H défini par

$$H = \left\{ P \in \mathbb{R}[X] \,\middle|\, \int_0^1 P(x)\,dx = 0 \right\}$$

et on note $D : H \to \mathbb{R}[X]$ l'application linéaire qui à tout polynôme P de H associe son polynôme dérivé P′ :

$$\forall P \in H, \quad D(P) = P'.$$

**Question 1.**

*a)* Soit $P \in \mathbb{R}[X]$. À l'aide de l'égalité $P = \left(P - \int_0^1 P(x)\,dx\right) + \int_0^1 P(x)\,dx$, montrer qu'il existe un unique couple $(Q, \lambda) \in H \times \mathbb{R}$ tel que $P = Q + \lambda$.

*b)* En déduire que D est surjectif.

*c)* Montrer que D est un isomorphisme.

On note désormais $\phi = D^{-1}$ l'isomorphisme réciproque. Ainsi, si $A \in \mathbb{R}[X]$, le polynôme $B = \phi(A)$ est l'unique polynôme dans H tel que $B' = A$.

**Question 2.** Soit $P \in \mathbb{R}[X]$. On note Q la fonction polynomiale définie par :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad Q(x) = \int_0^x P(t)\,dt + \int_0^1 (t-1)P(t)\,dt.$$

*a)* Montrer que $Q \in H$.

*b)* Montrer que $Q = \phi(P)$.

On considère la suite de polynômes $(B_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $B_0 = 1$ et la relation de récurrence $B_{n+1} = \phi(B_n)$.

**Question 3.**

*a)* Calculer $B_1$, $B_2$ et $B_3$.

*b)* Préciser le degré et le coefficient du terme de plus haut degré de $B_n$.

*c)* Montrer que pour tout $n \geqslant 2$, $B_n(0) = B_n(1)$.

**Question 4.** On pose pour tout $n \in \mathbb{N}$, $C_n(X) = (-1)^n B_n(1 - X)$.

*a)* Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $C_{n+1} = \phi(C_n)$.

*b)* En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $B_n(X) = (-1)^n B_n(1 - X)$. Qu'en déduit-on concernant la valeur de $B_n(0)$ lorsque $n$ est un entier impair supérieur ou égal à 3 ?

**Question 5.** Pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, on pose $\mathrm{R}_n(\mathrm{X}) = \mathrm{B}_{n+1}(\mathrm{X}+1) - \mathrm{B}_{n+1}(\mathrm{X})$.

*a)* Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\mathrm{R}_{n+1}(x) = \displaystyle\int_0^x \mathrm{R}_n(t)\,\mathrm{d}t$.

*b)* Exprimer alors le polynôme $\mathrm{R}_n$ en fonction de $n$ et de X.

*c)* En déduire que pour tout $p \in \mathbb{N}$, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\displaystyle\sum_{k=1}^{p} k^n = n!\big(\mathrm{B}_{n+1}(p+1) - \mathrm{B}_{n+1}(1)\big)$.

*d)* Exprimer la valeur de $\displaystyle\sum_{k=1}^{p} k^2$ en fonction de $p$, en justifiant votre réponse.

*e)* L'entier $n$ étant fixé, montrer que, lorsque $p$ tend vers $+\infty$, $\displaystyle\sum_{k=1}^{p} k^n \underset{p\to+\infty}{\sim} \frac{p^{n+1}}{n+1}$.

## Partie II. Nombres de Bernoulli

On pose pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, $b_n = \mathrm{B}_n(0)$.

**Question 6.**

*a)* Démontrer que l'on a pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\mathrm{B}_n(\mathrm{X}) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} b_{n-k}\frac{\mathrm{X}^k}{k!}$.

*b)* Déduire de la question 3c que la suite $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est définie par les relations :

$$b_0 = 1 \qquad \text{et} \qquad \forall n \in \mathbb{N}^*, \quad b_n = -\sum_{k=1}^{n} \frac{b_{n-k}}{(k+1)!}.$$

*c)* Montrer que pour tout entier $k \geqslant 1$, on a $b_{2k+1} = 0$.

*d)* Rédiger en Python une fonction `bernoulli(p)` qui prend pour argument un entier $p$ est renvoie le tableau $[b_0, b_1, \ldots, b_p]$ des $p+1$ premières valeurs de la suite $(b_n)$.

**Question 7.** Montrer que pour tout entier naturel $n \in \mathbb{N}^*$, on a :

$$\forall t \in ]0,1[, \quad 1 + 2\sum_{k=1}^{n} \cos(2k\pi t) = \frac{\sin\big((2n+1)\pi t\big)}{\sin(\pi t)}.$$

**Question 8.** Soit $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathscr{C}^1$. Montrer que $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \int_0^1 f(t)\sin(\pi n t)\,\mathrm{d}t = 0$. (On pourra effectuer une intégration par partie, et remarquer que $f$ et $f'$ sont bornées sur $[0,1]$.)

**Question 9.** Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on définit sur $]0,1[$ la fonction $f_n$ en posant :

$$\forall t \in ]0,1[, \quad f_n(t) = \frac{\mathrm{B}_n(t) - \mathrm{B}_n(0)}{\sin(\pi t)}.$$

*a)* Montrer que $f_n$ est prolongeable par continuité sur $[0,1]$. On admettra que ce prolongement est continûment dérivable.

Pour $k$ et $n$ dans $\mathbb{N}^*$, on pose $\mathrm{I}_{n,k} = \displaystyle\int_0^1 \mathrm{B}_n(t)\cos(2k\pi t)\,\mathrm{d}t$.

*b)* Calculer $\mathrm{I}_{1,k}$ et $\mathrm{I}_{2,k}$.

*c)* Trouver une relation de récurrence liant $\mathrm{I}_{n,k}$ et $\mathrm{I}_{n-2,k}$ et en déduire, que pour tout $p \geqslant 1$, $\mathrm{I}_{2p,k} = \dfrac{(-1)^{p-1}}{(4k^2\pi^2)^p}$ et $\mathrm{I}_{2p-1,k} = 0$.

*d)* Déterminer pour $n \in \mathbb{N}^*$ une expression de $\displaystyle\int_0^1 f_{2p}(t)\sin\big((2n+1)\pi t\big)\,\mathrm{d}t$ en fonction de $p$, $n$ et $b_{2p}$.

*e)* En déduire que $\displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^{2p}} = \frac{(-1)^{p-1}4^p\pi^{2p}}{2}b_{2p}$.

*f)* (Re)trouver alors la valeur de $\displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^2}$.

# Partie III. L'irrationalité de $\pi^2$

Dans cette partie, pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$ on considère le polynôme $P_n(X) = \dfrac{X^n(1-X)^n}{n!}$.

**Question 10.**

*a)* Montrer l'existence de $n+1$ entiers relatifs $e_n, e_{n+1}, \dots, e_{2n}$ tels que $P_n(X) = \dfrac{1}{n!}\displaystyle\sum_{k=n}^{2n} e_k X^k$.

*b)* Montrer que pour tout entier naturel $k$, $P_n^{(k)}(0)$ et $P_n^{(k)}(1)$ sont des entiers relatifs. On pourra remarquer que $P_n(X) = P_n(1-X)$.

On souhaite démontrer que $\pi^2$ est un nombre irrationnel, et pour cela on raisonne par l'absurde. On suppose donc que $\pi^2 = \dfrac{a}{b}$ où $a$ et $b$ sont deux entiers naturels non nuls.

**Question 11.** On pose, pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$, $Q_n(X) = b^n\left(\pi^{2n}P_n(X) - \pi^{2n-2}P_n^{(2)}(X) + \pi^{2n-4}P_n^{(4)}(X) + \cdots + (-1)^n P_n^{(2n)}(X)\right)$.

*a)* Montrer que $Q_n(0)$ et $Q_n(1)$ sont des entiers relatifs.

*b)* On pose, pour tout entier naturel non nul $n$ et tout $x$ réel,

$$f_n(x) = Q_n'(x)\sin(\pi x) - \pi Q_n(x)\cos(\pi x) \qquad \text{et} \qquad A_n = \pi\int_0^1 a^n P_n(x)\sin(\pi x)\,\mathrm{d}x.$$

Montrer que $f_n'(x) = \pi^2 a^n P_n(x)\sin(\pi x)$, et en déduire que $A_n$ est un entier relatif.

**Question 12.** On pose, toujours pour le même entier $a$, $u_n = \dfrac{a^n}{n!}$.

*a)* En considérant le quotient $\dfrac{u_{n+1}}{u_n}$, montrer que $\lim u_n = 0$.

*b)* Justifier l'existence d'un entier naturel $n_0$ tel que pour tout entier $n \geqslant n_0$, $\dfrac{a^n}{n!} < \dfrac{1}{2}$.

*c)* Montrer que pour tout $x \in [0,1]$, $0 \leqslant P_n(x) \leqslant \dfrac{1}{n!}$.

*d)* Montrer alors que pour tout entier $n \geqslant n_0$, $A_n \in \,]0,1[$, et conclure que $\pi^2$ est irrationnel.

*e)* Le réel $\pi$ peut-il être rationnel ?