Corrigé : polynômes et nombres de Bernoulli

Partie I. Polynômes de Bernoulli

Question 1.

a) Soit $P \in \mathbb{R}[X]$. On pose $\lambda = \int_0^1 P(t)\,dt$ et $Q = P - \lambda$. On a $P = Q + \lambda$; reste à prouver que $Q \in H$. Et en effet,

$$\int_0^1 Q(t)\,dt = \int_0^1 \big(P(t) - \lambda\big)\,dt = \int_0^1 P(t)\,dt - \lambda = 0.$$

Supposons maintenant l'existence d'un autre couple $(Q_1, \lambda_1) \in H \times \mathbb{R}$ tel que $P = Q_1 + \lambda_1$. Puisque $Q_1 \in H$ on a $\int_0^1 P(t)\,dt = \int_0^1 \lambda_1\,dt = \lambda_1$ donc $\lambda = \lambda_1$, et par suite $Q_1 = P - \lambda_1 = P - \lambda = Q$. Le couple (Q, λ) est bien unique.

b) Soit $R \in \mathbb{R}[X]$. L'opérateur de dérivation étant surjectif sur $\mathbb{R}[X]$, il existe un polynôme $P \in \mathbb{R}[X]$ tel que $P' = R$. D'après ce qui précède, on peut écrire $P = Q + \lambda$ avec $Q \in H$ et $\lambda \in \mathbb{R}$. Alors $R = P' = (Q+\lambda)' = Q' = D(Q)$, ce qui montre que D est surjectif.

c) Reste à prouver que D est injectif. Puisque D est linéaire, on considère un polynôme $Q \in H$ tel que $D(Q) = 0$. Le polynôme Q est donc constant : il existe $\alpha \in \mathbb{R}$ tel que $Q = \alpha$. On a alors $\int_0^1 Q(x)\,dx = \alpha$ et puisque $Q \in H$, on en déduit $\alpha = 0$, soit $Q = 0$.

Question 2.

a) Posons $R(x) = \int_0^x P(t)\,dt$. Une intégration par parties donne $\int_0^1 (t-1)P(t)\,dt = \Big[(t-1)R(t)\Big]_0^1 - \int_0^1 R(t)\,dt = \int_0^1 R(t)\,dt$ donc $Q(x) = R(x) - \int_0^1 R(t)\,dt$. On en déduit que $\int_0^1 Q(x)\,dx = \int_0^1 R(t)\,dt - \int_0^1 R(t)\,dt = 0$, soit $Q \in H$.

b) D'après le théorème fondamental de l'intégration, $Q' = P$, soit $D(Q) = P$ puisque $Q \in H$. D étant un isomorphisme, $Q = \phi(P)$.

Question 3.

a) $D(B_1) = B_0 = 1$ donc il existe $\alpha \in \mathbb{R}$ tel que $B_1 = X + \alpha$. On a $\int_0^1 B_1(x)\,dx = \frac{1}{2} + \alpha$ et puisque $B_1 \in H$, $\alpha = -\frac{1}{2}$ et $\boxed{B_1 = X - \frac{1}{2}}$

$D(B_2) = B_1 = X - \frac{1}{2}$ donc il existe $\beta \in \mathbb{R}$ tel que $B_2 = \frac{1}{2}X^2 - \frac{1}{2}X + \beta$. On calcule $\int_0^1 B_2(x)\,dx = \frac{1}{6} - \frac{1}{4} + \beta$ et $B_2 \in H$ donc $\beta = \frac{1}{12}$ et $\boxed{B_2 = \frac{1}{2}X^2 - \frac{1}{2}X + \frac{1}{12}}$

$D(B_3) = B_2 = \frac{1}{2}X^2 - \frac{1}{2}X + \frac{1}{12}$ donc il existe $\gamma \in \mathbb{R}$ tel que $B_3 = \frac{1}{6}X^3 - \frac{1}{4}X^2 + \frac{1}{12}X + \gamma$. On calcule $\int_0^1 B_3(x)\,dx = \frac{1}{24} - \frac{1}{12} + \frac{1}{24} + \gamma = \gamma$ et $B_3 \in H$ donc $\gamma = 0$ et $\boxed{B_3 = \frac{1}{6}X^3 - \frac{1}{4}X^2 + \frac{1}{12}X}$

b) Montrons par récurrence sur n que B_n est de degré n et de coefficient dominant égal à $\frac{1}{n!}$.

- C'est vrai pour $n = 0$ puisque $B_0 = 1$.
- Si $n \geqslant 1$, supposons le résultat acquis au rang $n-1$. Alors $B_n' = B_{n-1} = \frac{1}{(n-1)!}X^{n-1} + Q$ avec $\deg Q \leqslant n-2$ donc $B_n = \frac{1}{n!}X^n + R$ où R est un polynôme vérifiant $R' = Q$. On a donc $\deg R \leqslant n-1$ et la récurrence se propage.

c) Pour tout $n \geqslant 2$ on a $B_{n-1} \in H$ et $B_n' = B_{n-1}$ donc $0 = \int_0^1 B_{n-1}(x)\,dx = \int_0^1 B_n'(x)\,dx = B_n(1) - B_n(0)$ et $B_n(1) = B_n(0)$.

Question 4.

a) Pour $n \in \mathbb{N}$, $C'_{n+1}(X) = -(-1)^{n+1}B'_{n+1}(1-X) = (-1)^n B_n(1-X) = C_n(X)$. De plus, $\int_0^1 C_{n+1}(x)\,dx = (-1)^{n+1}\int_0^1 B_{n+1}(1-x)\,dx$ et le changement de variable $y = 1-x$ donne $\int_0^1 C_{n+1}(x)\,dx = (-1)^{n+1}\int_0^1 B_{n+1}(y)\,dy = 0$ car $B_{n+1} \in H$.

On a montré que $C_{n+1} \in H$ et que $D(C_{n+1}) = C_n$ donc $C_{n+1} = \phi(C_n)$.

b) Montrons par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$ que $C_n = B_n$.

- Si $n = 0$ on a $C_0 = 1 = B_0$.
- Si $n \geqslant 0$, supposons $C_n = B_n$. Alors $C_{n+1} = \phi(C_n) = \phi(B_n) = B_{n+1}$, donc la récurrence se propage.

En particulier on en déduit que $B_n(1) = (-1)^n B_n(0)$. En particulier, pour n impair on a $B_n(1) = -B_n(0)$. Or d'après la question 3.c on a $B_n(0) = B_n(1)$ pour $n \geqslant 2$. On en déduit que pour tout entier impair $n \geqslant 3$, $B_n(0) = B_n(1) = 0$.

Question 5.

a) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $B'_{n+2} = B_{n+1}$ donc $R'_{n+1} = B_{n+1}(X+1) - B_{n+1}(X) = R_n$. Il existe donc une constante λ telle que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $R_{n+1}(x) = \int_0^x R_n(t)\,dt + \lambda$. Mais d'après 3.c, $R_{n+1}(0) = B_{n+2}(1) - B_{n+2}(0) = 0$ donc $\lambda = 0$.

b) Montrons par récurrence sur n que $R_n = \dfrac{X^n}{n!}$.

- Si $n = 0$, $R_0 = B_1(X+1) - B_1(X) = \left(X + \frac{1}{2}\right) - \left(X - \frac{1}{2}\right) = 1$ donc le résultat est vrai pour $n = 0$.
- Si $n \geqslant 1$, supposons $R_{n-1} = \dfrac{X^{n-1}}{(n-1)!}$. Alors $R_n(x) = \displaystyle\int_0^x \frac{t^{n-1}}{(n-1)!}\,dt = \frac{x^n}{n!}$ donc la récurrence se propage.

c) Ainsi, $\displaystyle\sum_{k=1}^{p} \frac{k^n}{n!} = \sum_{k=1}^{p} R_n(k) = \sum_{k=1}^{p}\Big(B_{n+1}(k+1) - B_{n+1}(k)\Big) = B_{n+1}(p+1) - B_{n+1}(1)$ par télescopage.

d) En particulier, pour $n = 2$ on obtient $\displaystyle\sum_{k=1}^{p} k^2 = 2\Big(B_3(p+1) - B_3(1)\Big) = \frac{1}{3}(p+1)^3 - \frac{1}{2}(p+1)^2 + \frac{1}{6}(p+1) = \frac{p(p+1)(2p+1)}{6}$.

e) Lorsque p tend vers $+\infty$, $\displaystyle\sum_{k=1}^{p} k^n \sim n!B_{n+1}(p+1)$. La question 3b a montré que B_{n+1} est un polynôme de degré $n+1$ et de coefficient dominant égal à $\dfrac{1}{(n+1)!}$ donc $\displaystyle\sum_{k=1}^{p} k^n \sim n!\frac{(p+1)^{n+1}}{(n+1)!} \sim \frac{p^{n+1}}{n+1}$ (pour n fixé).

Partie II. Nombres de Bernoulli

Question 6.

a) D'après la formule de Taylor, $B_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} B_n^{(k)}(0)\frac{X^k}{k!}$. Or $B_n^{(k)} = B_{n-k}$ donc $B_n^{(k)}(0) = b_{n-k}$, et $B_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} b_{n-k}\frac{X^k}{k!}$.

b) D'après la question 3c, pour tout $n \geqslant 1$ on a $b_{n+1} = B_{n+1}(0) = B_{n+1}(1) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n+1}\frac{b_{n+1-k}}{k!} = b_{n+1} + \sum_{k=1}^{n+1}\frac{b_{n+1-k}}{k!}$ ce qui donne en réindexant : $\displaystyle\sum_{k=0}^{n}\frac{b_{n-k}}{(k+1)!} = 0$. Cette dernière égalité s'écrit aussi $b_n = -\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{b_{n-k}}{(k+1)!}$ et constitue la relation de récurrence recherchée.

c) On a montré en 4b que pour tout entier impair supérieur ou égal à 3, $B_n(0) = 0$ donc $b_{2k+1} = 0$ pour $k \geqslant 1$.

d) On définit tout d'abord une fonction qui calcule $n!$ avant de définir la fonction demandée.

```
def fact(n):
    p = 1
    for k in range(2, n + 1):
        p *= k
    return p
```

```
def bernoulli(p):
    b = [1]
    for n in range(1, p + 1):
        b.append(0)
        for k in range(1, n + 1):
            b[n] -= b[n-k] / fact(k + 1)
    return b
```

Question 7. D'après les formules d'Euler,

$$1+2\sum_{k=1}^{n}\cos(2k\pi t)=\sum_{k=0}^{n}(\mathrm{e}^{2ik\pi t}+\mathrm{e}^{-2ik\pi t})-1=\frac{1-\mathrm{e}^{2i(n+1)\pi t}}{1-\mathrm{e}^{2i\pi t}}+\frac{1-\mathrm{e}^{-2i(n+1)\pi t}}{1-\mathrm{e}^{-2i\pi t}}-1.$$

En réduisant au même dénominateur on obtient

$$1+2\sum_{k=1}^{n}\cos(2k\pi t)=\frac{\cos(2n\pi t)-\cos\big(2(n+1)\pi t\big)}{1-\cos(2\pi t)}=\frac{2\sin(\pi t)\sin\big((2n+1)\pi t\big)}{2\sin^2(\pi t)}=\frac{\sin\big((2n+1)\pi t\big)}{\sin(\pi t)}.$$

Question 8. Une intégration par parties donne : $\displaystyle\int_0^1 f(t)\sin(n\pi t)\,\mathrm{d}t=\frac{1}{n\pi}\Big(f_n(0)-(-1)^n f(1)\Big)+\frac{1}{n\pi}\int_0^1 f'(t)\cos(n\pi t)\,\mathrm{d}t.$
Or f et f' sont continues sur $[0,1]$, donc bornées : il existe M et M′ tel que : $\forall t\in[0,1]$, $|f(t)|\leqslant \mathrm{M}$ et $|f'(t)|\leqslant \mathrm{M}'$. Alors :

$$\Big|\int_0^1 f(t)\sin(n\pi t)\,\mathrm{d}t\Big|\leqslant\frac{2\mathrm{M}}{n\pi}+\frac{\mathrm{M}'}{n\pi}\int_0^1|\cos(n\pi t)|\,\mathrm{d}t\leqslant\frac{2\mathrm{M}+\mathrm{M}'}{n\pi}.$$

On a donc bien : $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\int_0^1 f(t)\sin(n\pi t)\,\mathrm{d}t=0.$

Question 9.

a) On a $f_n(t)=\dfrac{\mathrm{B}_n(t)-\mathrm{B}_n(0)}{t}\times\dfrac{t}{\sin(\pi t)}$ donc $\displaystyle\lim_{t\to0}f_n(t)=\frac{\mathrm{B}_n'(0)}{\pi}=\frac{\mathrm{B}_{n-1}(0)}{\pi}=\frac{b_{n-1}}{\pi}$. f_n est bien prolongeable en 0.

b) $\mathrm{I}_{1,k}=\displaystyle\int_0^1\Big(t-\frac12\Big)\cos(2\pi t)\,\mathrm{d}t$. Le changement de variable $u=t-1/2$ donne $\mathrm{I}_{1,k}=-\displaystyle\int_{-1/2}^{1/2}u\cos(2\pi u)\,\mathrm{d}u$, et la fonction à intégrer étant impaire, $\mathrm{I}_{1,k}=0$.
Sachant que $\mathrm{B}_2'=\mathrm{B}_1=\mathrm{X}-1/2$ et $\mathrm{B}_2''=\mathrm{B}_0=1$, deux intégrations par parties successives conduisent à :

$$\mathrm{I}_{2,k}=\int_0^1\mathrm{B}_2(t)\cos(2k\pi t)\,\mathrm{d}t=\Big[\frac{1}{2k\pi}\mathrm{B}_2(t)\sin(2k\pi t)+\frac{1}{4k^2\pi^2}\Big(t-\frac12\Big)\cos(2k\pi t)\Big]_0^1-\frac{1}{4k^2\pi^2}\int_0^1\cos(2k\pi t)\,\mathrm{d}t=\frac{1}{4k^2\pi^2}.$$

c) En effectuant là encore deux intégrations par parties on obtient, pour tout $n\geqslant 3$:

$$\mathrm{I}_{n,k}=\Big[\frac{1}{2k\pi}\mathrm{B}_n(t)\sin(2k\pi t)+\frac{1}{4k^2\pi^2}\mathrm{B}_{n-1}(t)\cos(2k\pi t)\Big]_0^1-\frac{1}{4k^2\pi^2}\int_0^1\mathrm{B}_{n-2}(t)\cos(2k\pi t)\,\mathrm{d}t$$

soit $\mathrm{I}_{n,k}=\dfrac{1}{4k^2\pi^2}\Big(\mathrm{B}_{n-1}(1)-\mathrm{B}_{n-1}(0)\Big)-\dfrac{1}{4k^2\pi^2}\mathrm{I}_{n-2,k}=-\dfrac{1}{4k^2\pi^2}\mathrm{I}_{n-2,k}$.
Lorsque n est pair, on peut poser $n=2p$ et alors : $\mathrm{I}_{2p,k}=\Big(-\dfrac{1}{4k^2\pi^2}\Big)^{p-1}\mathrm{I}_{2,k}=\dfrac{(-1)^{p-1}}{(4k^2\pi^2)^p}$.
Lorsque n est impair, on peut poser $n=2p+1$ et alors : $\mathrm{I}_{2p+1,k}=\Big(-\dfrac{1}{4k^2\pi^2}\Big)^{p}\mathrm{I}_{1,k}=0$.

d) On calcule :

$$\int_0^1 f_{2p}(t)\sin\big((2n+1)\pi t\big)\,\mathrm{d}t=\int_0^1\frac{\sin\big((2n+1)\pi t\big)}{\sin(\pi t)}\Big(\mathrm{B}_{2p}(t)-\mathrm{B}_{2p}(0)\Big)\,\mathrm{d}t=\int_0^1\Big(1+2\sum_{k=1}^{n}\cos(2k\pi t)\Big)\Big(\mathrm{B}_{2p}(t)-b_{2p}\Big)\,\mathrm{d}t$$

$$=-b_{2p}+2\sum_{k=1}^{n}\mathrm{I}_{2p,k}=-b_{2p}+\frac{2(-1)^{p-1}}{4^p\pi^{2p}}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k^{2p}}.$$

e) En passant à la limite suivant n, et compte tenu de la question 8 on obtient : $0=-b_{2p}+\dfrac{2(-1)^{p-1}}{4^p\pi^{2p}}\displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{1}{k^{2p}}$, soit encore :

$$\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{1}{k^{2p}}=\frac{(-1)^{p-1}4^p\pi^{2p}}{2}b_{2p}.$$

f) En particulier, pour $p=1$ on obtient : $\displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{1}{k^2}=2\pi^2 b_2=\frac{\pi^2}{6}.$

Partie III. L'irrationalité de π^2

Question 10.

a) D'après la formule du binôme, $\mathrm{P}_n(\mathrm{X}) = \dfrac{\mathrm{X}^n}{n!}\displaystyle\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}(-1)^k\mathrm{X}^k = \dfrac{1}{n!}\sum_{k=n}^{2n}(-1)^{k-n}\binom{n}{k-n}\mathrm{X}^k$, et $e_k = (-1)^{k-n}\dbinom{n}{k-n} \in \mathbb{Z}$.

b) 0 est racine d'ordre n de P_n donc si $k < n$ on a $\mathrm{P}_n^{(k)}(0) = 0$. P_n est de degré $2n$ donc si $k > 2n$ on a $\mathrm{P}_n^{(k)}(0) = 0$. Enfin, si $k \in [\![n, 2n]\!]$, d'après la formule précédente $\mathrm{P}_n^{(k)}(0) = \dfrac{k!}{n!}e_k \in \mathbb{Z}$.

Par ailleurs, $\mathrm{P}_n(\mathrm{X}) = \mathrm{P}_n(1-\mathrm{X})$ donc $\mathrm{P}_n^{(k)}(\mathrm{X}) = (-1)^k\mathrm{P}_n^{(k)}(1-\mathrm{X})$ et ainsi $\mathrm{P}_n^{(k)}(1) = (-1)^k\mathrm{P}_n^{(k)}(0) \in \mathbb{Z}$.

Question 11.

a) Puisque $\pi^2 = \dfrac{a}{b}$ on a $\mathrm{Q}_n(\mathrm{X}) = b^n\displaystyle\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\frac{a^{n-k}}{b^{n-k}}\mathrm{P}_n^{(2k)}(\mathrm{X}) = \sum_{k=0}^{n}(-1)^k a^{n-k}b^k\mathrm{P}_n^{(2k)}(\mathrm{X})$ et d'après la question précédente, $\mathrm{Q}_n(0) \in \mathbb{Z}$ et $\mathrm{Q}_n(1) \in \mathbb{Z}$.

b) On calcule $f_n'(x) = \mathrm{Q}_n''(x)\sin(\pi x) + \pi^2\mathrm{Q}_n(x)\sin(\pi x)$ et

$$\mathrm{Q}_n''(x) = b^n\sum_{k=0}^{n-1}(-1)^k\pi^{2n-2k}\mathrm{P}_n^{(2k+2)}(x) = b^n\sum_{k=1}^{n}(-1)^{k-1}\pi^{2n-2k+2}\mathrm{P}_n^{(2k)}(x) = -\pi^2\Big(\mathrm{Q}_n(x) - b^n\pi^{2n}\mathrm{P}_n(x)\Big)$$

donc $f_n'(x) = \pi^{2n+2}b^n\mathrm{P}_n(x)\sin(\pi x) = \pi^2a^n\mathrm{P}_n(x)\sin(\pi x)$. Ainsi, $\mathrm{A}_n(x) = \left[\dfrac{1}{\pi}f_n(x)\right]_{x=0}^{x=1} = \dfrac{1}{\pi}\Big(f_n(1) - f_n(0)\Big) = \mathrm{Q}_n(0) + \mathrm{Q}_n(1) \in \mathbb{Z}$.

Question 12.

a) $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} = \dfrac{a}{n+1}$ donc $\lim\dfrac{u_{n+1}}{u_n} = 0$. Il existe donc un rang N à partir duquel $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} \leqslant \dfrac{1}{2}$. On en déduit pour tout $n \geqslant \mathrm{N}$ que $0 \leqslant u_n \leqslant \dfrac{u_\mathrm{N}}{2^{n-\mathrm{N}}}$ et donc que $\lim u_n = 0$.

b) Puisque $\lim u_n = 0$ il existe un rang n_0 à partir duquel $u_n < \dfrac{1}{2}$, soit $\dfrac{a^n}{n!} < \dfrac{1}{2}$.

c) Pour tout $x \in [0,1]$, $1-x \in [0,1]$ donc $x(1-x) \in [0,1]$ et $0 \leqslant \mathrm{P}_n(x) \leqslant \dfrac{1}{n!}$.

d) Pour tout $x \in [0,1]$ on a donc $0 \leqslant \pi a^n\mathrm{P}_n(x)\sin(\pi x) \leqslant \pi\dfrac{a^n}{n!}\sin(\pi x)$ et en intégrant : $0 \leqslant \mathrm{A}_n \leqslant \dfrac{a^n}{n!}\Big[-\cos(\pi x)\Big]_{x=0}^{x=1} = 2\dfrac{a^n}{n!}$.

Pour $n \geqslant n_0$ on a donc $0 \leqslant \mathrm{A}_n < 1$. Enfin, on ne peut avoir $\mathrm{A}_n = 0$ car A_n est l'intégrale d'une fonction continue et positive non identiquement nulle, donc $\mathrm{A}_n \in \,]0,1[$.

Mais la question 11b a montré que A_n est un entier ; l'absurdité recherchée est donc obtenue, et on peut en conclure que π^2 ne peut être rationnel.

e) Le carré d'un nombre rationnel est rationnel, donc π est lui même irrationnel.

Remarque. Cette preuve de l'irrationalité de π, trouvée par Ivan Niven en 1947, est sans doute l'une des plus simples connues à ce jour.