Matrices de Hessenberg (BECAS 2020)

Partie I. Matrices de Hessenberg

Question 1.

a) Posons $\mathcal{B} = \left(\mathrm{E}_{ij}^{(n)} \mid i \leqslant j+1\right)$. Alors $\mathscr{H}_n(\mathbb{R}) = \mathrm{Vect}(\mathcal{B})$ donc $\mathscr{H}_n(\mathbb{R})$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

b) $\dim \mathscr{H}_n(\mathbb{R}) = \mathrm{card}\,\mathcal{B} = n^2 - \big(1+2+\cdots+(n-2)\big) = n^2 - \dfrac{(n-1)(n-2)}{2} = \dfrac{n^2+3n-2}{2}$.

Question 2.

a) On calcule $\chi_{\mathrm{H}_+(a)}(x) = \big(x-a-\sqrt{a}\big)\big((x-a)^2-a\big) = (x-a-\sqrt{a})^2(x-a+\sqrt{a})$ donc $\mathrm{Sp}(\mathrm{H}_+(a)) = \big\{a-\sqrt{a}, a+\sqrt{a}\big\}$.

On résout $\mathrm{H}_-(a)\mathrm{X} = (a-\sqrt{a})\mathrm{X} \iff \mathrm{X} \in \mathrm{Vect}\begin{pmatrix}-\sqrt{a}\\1\\0\end{pmatrix}$ et $\mathrm{H}_-(a)\mathrm{X} = (a+\sqrt{a})\mathrm{X} \iff \mathrm{X} \in \mathrm{Vect}\left\{\begin{pmatrix}\sqrt{a}\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}\right\}$ donc $\mathrm{H}_+(a)$ est diagonalisable.

b) Si on pose $\mathrm{P} = \begin{pmatrix}-\sqrt{a} & \sqrt{a} & 0\\ 1 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$ on a donc $\mathrm{H}_+(a) = \mathrm{P}\begin{pmatrix}a-\sqrt{a} & 0 & 0\\ 0 & a+\sqrt{a} & 0\\ 0 & 0 & a+\sqrt{a}\end{pmatrix}\mathrm{P}^{-1}$ et

$$\frac{1}{r^p}\mathrm{H}_+(a)^p = \mathrm{P}\begin{pmatrix}\left(\dfrac{a-\sqrt{a}}{r}\right)^p & 0 & 0\\ 0 & \left(\dfrac{a+\sqrt{a}}{r}\right)^p & 0\\ 0 & 0 & \left(\dfrac{a+\sqrt{a}}{r}\right)^p\end{pmatrix}\mathrm{P}^{-1}$$

Cette suite de matrices converge si et seulement si les deux suites $\left(\dfrac{a-\sqrt{a}}{r}\right)^p$ et $\left(\dfrac{a+\sqrt{a}}{r}\right)^p$ convergent, autrement dit si et seulement si $a-\sqrt{a} \leqslant r$ et $a+\sqrt{a} \leqslant r$, soit en définitive lorsque $r \geqslant a+\sqrt{a}$.

c) On a $\mathrm{Q}(a) = \mathrm{P}\begin{pmatrix}0 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}\mathrm{P}^{-1}$ donc $\mathrm{Q}(a)$ est la matrice d'une projection de rang 2. On reconnaît la matrice d'un des deux projecteurs spectraux de $u_{\mathrm{H}_+(a)}$: ainsi $\mathrm{Im}(u_{\mathrm{Q}(a)}) = \mathrm{Vect}\big(\sqrt{a}e_1+e_2, e_3\big)$ et $\mathrm{Ker}(u_{\mathrm{Q}(a)}) = \mathrm{Vect}\big(-\sqrt{a}e_1+e_2\big)$.

d) On calcule cette fois $\chi_{\mathrm{H}_-(a)}(x) = (x-a)(x^2-ax+a^2)$ donc $\mathrm{Sp}_{\mathbb{C}}(\mathrm{H}_-(a)) = \big\{a, a-i\sqrt{a}, a+i\sqrt{a}\big\}$.

Il existe cette fois $\mathrm{P} \in \mathcal{GL}_3(\mathbb{C})$ telle que $\mathrm{H}_-(a) = \mathrm{P}\begin{pmatrix}a & 0 & 0\\ 0 & a-i\sqrt{a} & 0\\ 0 & 0 & a+i\sqrt{a}\end{pmatrix}$ et

$$\frac{1}{r^p}\mathrm{H}_-(a)^p = \mathrm{P}\begin{pmatrix}\left(\dfrac{a}{r}\right)^p & 0 & 0\\ 0 & \left(\dfrac{a-i\sqrt{a}}{r}\right)^p & 0\\ 0 & 0 & \left(\dfrac{a+i\sqrt{a}}{r}\right)^p\end{pmatrix}\mathrm{P}^{-1}$$

Cette suite de matrices converge si et seulement si $a \leqslant r$, $|a-i\sqrt{a}| < r$ et $|a+i\sqrt{a}| < r$, soit $r > \sqrt{a(a+1)}$.

Question 3.

a) On a $\mathrm{J}_3 = \begin{pmatrix}0 & 0 & 0\\ 1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\end{pmatrix}$, $\mathrm{J}_3^2 = \begin{pmatrix}0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\\ 1 & 0 & 0\end{pmatrix}$ et $\mathrm{J}_3^3 = 0$. Plus généralement, $\mathrm{J}_n^q = \displaystyle\sum_{j=1}^{n-q}\mathrm{E}_{j+q,j}^{(n)}$ si $q < n$ et $\mathrm{J}_n^q = 0$ si $q \geqslant n$.

b) I_n et J_n commutent donc d'après la formule du binôme, $H_n(a,b)^p = \sum_{k=0}^{p}\binom{p}{k}a^{p-k}b^kJ_n^k$. Pour $p \geqslant n-1$ on a donc :

$$H_n(a,b)^p = \sum_{k=0}^{n-1}\binom{p}{k}a^{p-k}b^kJ_n^k = \sum_{k=0}^{n-1}\binom{p}{k}a^{p-k}b^k\Big(\sum_{j=1}^{n-k}E_{j+k,j}^{(n)}\Big) = \sum_{j=1}^{n}\sum_{k=0}^{n-j}\binom{p}{k}a^{p-k}b^kE_{j+k,j}^{(n)} = \sum_{j=1}^{n}\sum_{i=j}^{n}\binom{p}{i-j}a^{p-i+j}b^{i-j}E_{i,j}^{(n)}$$

en posant $i = k+j$.
On constate alors que les coefficients de $H_n(a,b)^{n-1}$ situés sur ou en dessous de la diagonale sont sommes de termes strictement positifs donc sont non nuls.

c) La suite $\big(H_n(a,b)^p\big)_p$ converge lorsque pour tout $(i,j) \in [\![1,n]\!]$ tel que $i \geqslant j$, la suite $\binom{p}{i-j}a^{p-i+j}b^{i-j}$ possède une limite lorsque p tend vers $+\infty$.
On a $\binom{p}{i-j} \underset{p\to+\infty}{\sim} \dfrac{p^{i-j}}{(i-j)!}$ donc il y a convergence lorsque $|a| < 1$.

Partie II. Rayon spectral

Question 4.

a) **Remarque**. Pour la suite de la question il est préférable de considérer $T \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ plutôt que $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, mais ceci n'a de toute façon pas d'indidence sur le raisonnement.
Multiplier à droite par P_ϵ revient à multiplier la colonne de rang j par ϵ^j ; multiplier à gauche par P_ϵ^{-1} revient à multiplier la ligne de rang i par ϵ^{-i} donc pour tout $(i,j) \in [\![1,n]\!]^2$, $\big(P_\epsilon^{-1}TP_\epsilon\big)[i,j] = \epsilon^{j-i}T[i,j]$.

b) Chercher $\epsilon > 0$ tel que pour tout $j > i$, $\big|\big(P_\epsilon^{-1}TP_\epsilon\big)[i,j]\big| \leqslant \alpha$ revient à chercher $\epsilon > 0$ tel que pour tout $j > i$, $\epsilon^{j-i}\big|T[i,j]\big| \leqslant \alpha$.
Or pour tout $(i,j) \in [\![1,n]\!]$ tel que $j > i$, $\lim\limits_{\epsilon\to 0}\epsilon^{j-i} = 0$ donc cette condition est toujours réalisable, à condition de choisir ϵ assez petit. Une fois ce choix fait, la matrice $P_\epsilon^{-1}TP_\epsilon$ est semblable à T et vérifie la condition demandée.

c) La matrice M est trigonalisable dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$: il existe une matrice triangulaire supérieure $T \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ semblable à M dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. D'après la question précédente, T est elle-même semblable à une matrice M′ triangulaire supérieure mais dont tous les coefficients non diagonaux sont de modules inférieurs ou égaux à r.
Ainsi, il existe $P \in \mathcal{GL}_n(\mathbb{C})$ tel que $M = PM'P^{-1}$, et les termes diagonaux de M′ sont les valeurs propres de M, donc sont eux aussi en module inférieurs ou égaux à $\rho(M)$ donc inférieurs à r.

Question 5. Considérons un réel r' vérifiant : $\rho(M) < r' < r$, et appliquons la question précédente à r' : M est semblable dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ à une matrice M′ triangulaire supérieure dont tous les coefficients sont en module inférieurs ou égaux à r'.
On démontre alors facilement par récurrence sur p que pour tout $(i,j) \in [\![1,n]\!]$, $\big|(M')^p[i,j]\big| \leqslant n^p(r')^p$.
Ainsi, pour tout $(i,j) \in [\![1,n]\!]^2$, $\Big|\dfrac{1}{r^p}(M')^p[i,j]\Big| \leqslant n^p\Big(\dfrac{r'}{r}\Big)^p$ et $\lim\limits_{p\to+\infty}\dfrac{1}{r^p}(M')^p[i,j] = 0$, ce qui prouve que $\dfrac{1}{r^p}M^p$ converge vers la matrice nulle.

Question 6.

a) M et M^T ont même polynôme caractéristique donc mêmes valeurs propres donc λ est valeur propre de u_M et de u_M^* : il existe deux vecteurs non nuls x et y de $\mathbb{R}^n$ tels que $u_M(x) = \lambda x$ et $u_M^*(y) = \lambda y$.

b) **Remarque**. Pour le produit scalaire canonique on a pour deux vecteurs z_1 et z_2 quelconques,

$$\langle u_M(z_1) \mid z_2\rangle = (MZ_1)^TZ_2 = Z_1^TM^TZ_2 = \langle z_1 \mid u_M^*(z_2)\rangle$$

Soit maintenant $z \in \mathrm{Vect}(y)^\perp$. Alors $\langle u_M(z) \mid y\rangle = \langle z \mid u_M^*(y)\rangle = \lambda\langle z \mid y\rangle = 0$ donc $u_M(z) \in \mathrm{Vect}(y)^\perp$: le sous-espace vectoriel $\mathrm{Vect}(y)^\perp$ est stable par u_M.
Considérons maintenant une base orthonormée (e') adaptée à la décomposition de l'espace $E = \mathrm{Vect}(y) \oplus \mathrm{Vect}(y)^\perp$, et $P = \mathrm{Mat}_{(e)}(e')$. La matrice P est orthogonale, et puisque $\mathrm{Vect}(y)^\perp$ est stable par u_M, $M = P\left(\begin{array}{c|ccc} a_1 & 0 & \cdots & 0 \\ \hline a_2 & & & \\ \vdots & & A & \\ a_n & & & \end{array}\right)P^T$, où A est la matrice dans $(e'_2,\dots,e'_n)$ de l'endomorphisme induit par u_M sur $\mathrm{Vect}(y)^\perp$.
On a $a_1 = \langle e'_1 \mid u_M(e'_1)\rangle = \langle u_M^*(e'_1) \mid e'_1\rangle = \lambda\langle e'_1 \mid e'_1\rangle = \lambda$ donc $\chi_M(x) = (x-\lambda)\chi_A(x)$. Et puisque λ est valeur propre simple de M, λ n'est pas valeur propre de χ_A, ce qui montre que λ n'est pas valeur propre de l'induit de u_M sur $\mathrm{Vect}(y)^\perp$.

c) Puisque $\operatorname{Ker}(u_M - \lambda \mathrm{Id}) = \operatorname{Vect}(x)$ on en déduit que $\operatorname{Vect}(x) \cap \operatorname{Vect}(y)^\perp = \{0_E\}$. Mais $\dim \operatorname{Vect}(x) = 1$ et $\dim \operatorname{Vect}(y)^\perp = n-1$ donc $E = \operatorname{Vect}(x) \oplus \operatorname{Vect}(y)^\perp$.

d) La question précédente a montré l'existence d'un supplémentaire de $\operatorname{Vect}(x)$ stable par u_M ; il existe donc une matrice $P \in \mathcal{GL}_n(\mathbb{R})$ telle que $M = P\left(\begin{array}{c|ccc} \lambda & 0 & \cdots & 0 \\ \hline 0 & & & \\ \vdots & & A & \\ 0 & & & \end{array}\right)P^{-1}$. On a donc $\dfrac{1}{\rho(M)^p} M^p = \dfrac{1}{\lambda^p} M^p = P\left(\begin{array}{c|ccc} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \hline 0 & & & \\ \vdots & & \frac{1}{\lambda^p}A^p & \\ 0 & & & \end{array}\right)P^{-1}$

Par hypothèse, $\rho(A) < \rho(M) = \lambda$ donc d'après la question 5, $\lim\limits_{p\to+\infty} \dfrac{1}{\lambda^p} A^p = 0$ et $\lim\limits_{p\to+\infty} \dfrac{1}{\rho(M)^p} M^p = P\left(\begin{array}{c|ccc} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \hline 0 & & & \\ \vdots & & O & \\ 0 & & & \end{array}\right)P^{-1} = Q$.

Partie III. Matrices irréductibles

Question 7.

a) $H_+(a)$ est J-réduite pour $J = \{1,2\}$ et $J = \{3\}$ (et bien sûr pour $J = \{1,2,3\}$), $H_-(a)$ est J-réduite pour $J = \{1,2\}$ (et pour $J = \{1,2,3\}$).

b) $H_n(a,b)$ est $\{n\}$-réduite donc n'est pas irréductible.

Question 8. Supposons M J-réduite, où $J \neq \varnothing$ et $J \neq [\![1,n]\!]$ est une partie de $[\![1,n]\!]$. En permutant les vecteurs de (e) pour placer en premier ceux dont les indices appartiennent à J on obtient une base (e') avec $M = P\begin{pmatrix} A & B \\ O & C \end{pmatrix}P^{-1}$ et $P = \operatorname{Mat}_{(e)}(e')$.
Il importe de noter que les coefficients de $M' = \begin{pmatrix} A & B \\ O & C \end{pmatrix}$ sont les mêmes que ceux de M puisqu'on s'est contenté de modifier l'ordre des vecteurs de la base (e). On a alors $M^p = P(M')^p P^{-1}$ et les coefficients de M^p et de $(M')^p$ sont les mêmes à permutation près. Or $(M')^p = \begin{pmatrix} A^p & \times \\ O & C^p \end{pmatrix}$ donc M^p comporte des coefficients nuls pour tout $p \in \mathbb{N}^*$.
On en déduit par contraposée que si pour tout $p \in \mathbb{N}^*$ la matrice M^p n'a aucun coefficient nul, alors M est irréductible.

Question 9.

a) Choisissons a et b tels que $0 < a < \min\Big(H[i,i] \;\Big|\; i \in [\![1,n]\!]\Big)$ et $0 < b < \min\Big(H[j+1,j] \;\Big|\; j \in [\![1,n-1]\!]\Big)$. Alors tous les coefficients de $H - H_n(a,b)$ sont positifs ou nuls.

b) On a $H = H_n(a,b) + \big(H - H_n(a,b)\big)$ donc $H^{n-1} = H_n(a,b)^{n-1} + \big(H - H_n(a,b)\big)^{n-1} + B$ où B est une somme de matrices formée de produits de matrices égales à $H_n(a,b)$ ou $\big(H - H_n(a,b)\big)$ (on ne peut utiliser la formule du binôme car les matrices ne commutent pas). Ce qui importe, c'est d'observer que ces matrices ont des coefficients positifs ou nuls donc la matrice B a des coefficients positifs ou nuls.
Sachant que la matrice $H - H_n(a,b)$ a des coefficients positifs ou nuls, et des coefficients strictement positifs sur et au dessous de la sous-diagonale, il est facile de prouver par récurrence que tous ces coefficients restent strictement positifs pour chacune des puissances de $H - H_n(a,b)$, et en particulier pour $\big(H - H_n(a,b)\big)^{n-1}$.
Enfin, la question 3b a montré que tous les coefficients sous la diagonale de $H_n(a,b)^{n-1}$ sont strictement positifs.
De tout ceci il résulte que tous les coefficients de H^{n-1} sont strictement positifs, et donc que H est irréductible.