Chapitre 3

Suites et séries

Outil de base en analyse, la notion de *suite numérique* apparaît très tôt dans l'histoire des sciences, accompagnée de l'idée intuitive de la convergence. Cependant, il faut attendre le XIXe siècle et les travaux de Cauchy et de Weierstrass pour substituer aux concepts intuitifs qui avaient prévalu jusque là les définitions que nous connaissons. Au tournant du XXe siècle, les travaux de Hilbert et de Banach relatifs aux espaces de fonctions étendent la notion de convergence dans un cadre plus vaste : les *espaces vectoriels normés*, donnant ainsi un cadre formel à la définition de la convergence d'une suite de vecteurs, de matrices, de fonctions, etc.

1. Espaces vectoriels normés

1.1 Normes et distances

En géométrie, la *norme* est une extension de la valeur absolue des nombres aux vecteurs. Elle permet de mesurer la *longueur* d'un vecteur, mais définit aussi, nous le verrons, une *distance* entre deux vecteurs. Cette distance nous permettra de définir la notion de suite convergente, puis plus tard de limite d'une fonction à valeurs vectorielles.

Dans tout le chapitre, E désigne un $\mathbb{K}$-espace vectoriel, avec $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

Définition. — *On appelle* norme *sur* E *toute application* $\mathrm{N} : \mathrm{E} \to \mathbb{R}_+$ *vérifiant :*

(i) $\mathrm{N}(x) = 0 \iff x = 0_{\mathrm{E}}$;

(ii) pour tout $x \in \mathrm{E}$, *pour tout* $\lambda \in \mathbb{K}$, $\quad \mathrm{N}(\lambda x) = |\lambda| \mathrm{N}(x)$;

(iii) pour tout $(x, y) \in \mathrm{E}^2$, $\quad \mathrm{N}(x + y) \leqslant \mathrm{N}(x) + \mathrm{N}(y)$ *(inégalité triangulaire).*

On appelle espace vectoriel normé *tout espace vectoriel muni d'une norme.*

En général, on conviendra d'utiliser la notation usuelle $\mathrm{N}(x) = \|x\|$.

Proposition 1.1 (seconde inégalité triangulaire) — *Pour tout* $(x, y) \in \mathrm{E}^2$, $\big| \|x\| - \|y\| \big| \leqslant \|x - y\|$.

Remarque. Le terme de *norme* ne vous est pas inconnu : à tout produit scalaire défini sur un espace vectoriel réel est associée une norme définie par : $\|x\| = \sqrt{\langle x \mid x \rangle}$. On vérifie que ce type de norme respecte la définition que nous venons de donner, la seule difficulté venant de l'inégalité triangulaire, qui est une conséquence de l'inégalité de Cauchy-Schwarz (voir encadré).
Mais attention : dans le cas général une norme n'est pas forcément issue d'un produit scalaire. Celles qui le sont seront dites *euclidiennes*, pour les distinguer du cas général.

Inégalité de Cauchy-Schwarz. *Si* E *est un espace euclidien, alors pour tout* $(x, y) \in \mathrm{E}^2$, $|\langle x \mid y \rangle| \leqslant \|x\| . \|y\|$.

De cette inégalité résulte l'inégalité triangulaire pour une norme euclidienne :

$$\begin{aligned} \|x + y\|^2 = \langle x + y \mid x + y \rangle = \langle x \mid x \rangle + 2\langle x \mid y \rangle + \langle y \mid y \rangle &= \|x\|^2 + 2\langle x \mid y \rangle + \|y\|^2 \\ &\leqslant \|x\|^2 + 2\|x\|.\|y\| + \|y\|^2 = \big(\|x\| + \|y\|\big)^2. \end{aligned}$$

Exemples. Lorsque $\mathrm{E} = \mathbb{R}^p$ on utilise souvent l'une des normes suivantes : si $x = (x_1, \dots, x_p) \in \mathbb{R}^p$,

$$\|x\|_\infty = \max\big(|x_1|, |x_2|, \dots, |x_p|\big) \qquad \|x\|_1 = \sum_{k=1}^{p} |x_k| \qquad \|x\|_2 = \Big(\sum_{k=1}^{p} x_k^2\Big)^{1/2}$$

Remarquons que les deux premières normes peuvent être aussi définies sur $\mathbb{C}^p$.

Exercice 1. Pour $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ on pose $\|A\| = \sqrt{\operatorname{tr}(A^T A)}$.
Montrer que l'on définit ainsi une norme euclidienne sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ (appelée *norme de Frobenius*), norme qui vérifie en plus la propriété :

$$\forall (A, B) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})^2, \quad \|AB\| \leqslant \|A\| \times \|B\|.$$

Distance entre deux vecteurs

Définition. — *Lorsque* E *est un espace vectoriel normé et* $(x, y) \in E^2$, *on appelle* distance *entre* x *et* y *le réel* $d(x, y) = \|y - x\|$.

Cette notion de distance est importante ; c'est elle qui nous permettra de généraliser en dimension supérieure les notions d'analyse que sont la convergence des suites, la continuité des fonctions, ...
À chaque norme est associé une distance différente, mais toutes les distances ont en commun les propriétés suivantes :

Proposition 1.2 — *Si* d *est une distance de* E, *alors :*

- $\forall (x, y) \in E^2, \quad d(x, y) = d(y, x) \quad$ *(symétrie) ;*
- $\forall (x, y) \in E^2, \quad d(x, y) = 0 \iff x = y \quad$ *(séparation) ;*
- $\forall (x, y, z) \in E^3, \quad d(x, z) \leqslant d(x, y) + d(y, z) \quad$ *(inégalité triangulaire).*

Définition. — *On appelle* sphère *ce centre* $a \in E$ *et de rayon* $r > 0$ *l'ensemble des vecteurs* $x \in E$ *vérifiant :* $d(a, x) = r$. *Autrement dit,*

$$S(a, r) = \left\{ x \in E \;\middle|\; \|x - a\| = r \right\}.$$

Exercice 2. Dessiner la sphère unité (c'est-à-dire la sphère de centre 0_E de rayon 1) pour chacune des trois normes $\|\cdot\|_\infty$, $\|\cdot\|_1$ et $\|\cdot\|_2$ dans $\mathbb{R}^2$.

Par analogie aux intervalles ouverts et fermés de $\mathbb{R}$, on adopte en outre les définitions suivantes :

Définition. — *On appelle* boule ouverte *de centre* $a \in E$ *et de rayon* $r > 0$ *l'ensemble des vecteurs* $x \in E$ *vérifiant :* $d(a, x) < r$. *Autrement dit,*

$$\mathring{B}(a, r) = \left\{ x \in E \;\middle|\; \|x - a\| < r \right\}.$$

On appelle boule fermée *de centre* $a \in E$ *et de rayon* $r > 0$ *l'ensemble des vecteurs* $x \in E$ *vérifiant :* $d(a, x) \leqslant r$. *Autrement dit,*

$$\overline{B}(a, r) = \left\{ x \in E \;\middle|\; \|x - a\| \leqslant r \right\}.$$

Remarque. Les intervalles sont les seules parties *convexes* de $\mathbb{R}$, c'est-à-dire vérifiant la propriété :

$$\forall (a, b) \in A^2, \qquad [a, b] \subset A.$$

Dans le cas d'un espace vectoriel, on définit la notion de segment en posant :

$$\forall (a, b) \in E^2, \quad \boxed{[a, b] = \left\{ (1 - t)a + tb \;\middle|\; t \in [0, 1] \right\}}$$

On peut dès lors définir la notion de *convexité* dans un espace vectoriel :

Définition. — *Une partie* A *d'un espace vectoriel (normé)* E *est dite* convexe *lorsque :*

$$\forall (a, b) \in A^2, \qquad [a, b] \subset A.$$

Proposition 1.3 — *Les boules ouvertes et les boules fermées sont des parties convexes d'un espace vectoriel normé.*

C'est notion de boule permet d'étendre certaines propriétés topologiques de $\mathbb{R}$ au cas d'un espace vectoriel normé. Prenons par exemple la notion de partie *bornée*. Dans le cas réel, une partie bornée est définie ainsi : « *une partie* A *de* $\mathbb{R}$ *est dite bornée lorsqu'il existe un réel* $M > 0$ *tel que* $A \subset [-M, M]$ ». Dans le cadre des espaces vectoriels normés, cette définition devient :

Définition. — *Soit* E *un* $\mathbb{K}$*-espace vectoriel de dimension finie muni d'une norme* $\|\cdot\|$. *Une partie* A *de* E *est dite* bornée *lorsqu'il existe* $M > 0$ *tel que* $A \subset \overline{B}(0_E, M)$, *autrement dit tel que :* $\forall x \in A$, $\|x\| \leqslant M$.

• Normes équivalentes

Nous avons vu dans l'exercice 2 que la forme des boules dépend de la norme choisie, en conséquence de quoi la notion de partie bornée dépend *a priori* du choix de la norme. Cependant, on peut constater que dans $\mathbb{R}^2$ et pour les trois normes que nous avons pris en exemple, ce n'est pas le cas : si une partie A est bornée pour une de ces trois norme, elle le sera pour les deux autres (illustration figure 1).

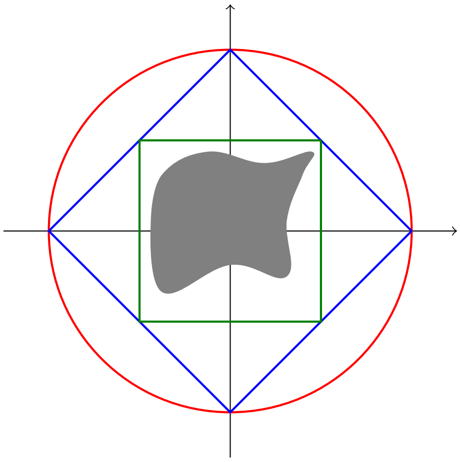


Figure 1 – Une partie bornée pour la norme $\|\cdot\|_\infty$ l'est aussi pour les normes $\|\cdot\|_1$ et $\|\cdot\|_2$.

Cette propriété résulte des inégalités suivantes. Pour tout $x \in \mathbb{R}^2$,

- $\|x\|_1 \leqslant 2\|x\|_\infty$ donc toute partie bornée pour la norme $\|\cdot\|_\infty$ l'est aussi pour la norme $\|\cdot\|_1$;
- $\|x\|_\infty \leqslant \|x\|_1$ donc toute partie bornée pour la norme $\|\cdot\|_1$ l'est aussi pour la norme $\|\cdot\|_\infty$;

Et de même,

- $\|x\|_2 \leqslant \sqrt{2}\|x\|_\infty$ donc toute partie bornée pour la norme $\|\cdot\|_\infty$ l'est aussi pour la norme $\|\cdot\|_2$;
- $\|x\|_\infty \leqslant \|x\|_2$ donc toute partie bornée pour la norme $\|\cdot\|_2$ l'est aussi pour la norme $\|\cdot\|_\infty$;

Définition. (hors programme) — *Deux normes* N_1 *et* N_2 *sont dites équivalentes lorsqu'il existe deux réels* $\alpha > 0$ *et* $\beta > 0$ *tels que pour tout* $x \in E$, $N_1(x) \leqslant \alpha N_2(x)$ *et* $N_2(x) \leqslant \beta N_1(x)$.

Proposition 1.4 — *Si deux normes* N_1 *et* N_2 *sont équivalentes, toute partie bornée pour l'une de ces deux normes l'est aussi pour l'autre.*

Nous admettrons le résultat notable suivant :

Théorème 1.5 — *Dans un* $\mathbb{K}$*-espace vectoriel de dimension finie, toutes les normes sont équivalentes.*

avec pour conséquence immédiate :

Corollaire — *Dans un espace vectoriel de dimension finie, la notion de partie bornée est indépendante du choix de la norme.*

Attention. On prendra bien garde au fait que l'équivalence des normes n'est valable qu'*en dimension finie*. Cette hypothèse est primordiale, et a pour conséquence que les différentes notions d'analyse réelle qu'on prolonge au cas d'un espace vectoriel de dimension finie (à commencer par la convergence des suites au paragraphe suivant) ne dépendent pas du choix de la norme utilisée. En revanche, ce théorème est mis en défaut en dimension infinie, avec pour conséquence que dans ces espaces une partie peut être bornée pour une certaine norme, et pas pour d'autres.

1.2 Normes d'opérateurs (notion hors programme)

On appelle *norme matricielle* toute norme sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ qui vérifie en plus la propriété :

$$\forall (A,B) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})^2, \quad \|AB\| \leqslant \|A\|.\|B\|.$$

Nous avons montré dans l'exercice 1 que la norme euclidienne canonique (la norme de Frobenius) vérifie cette propriété.
Il existe une autre façon de définir une norme matricielle, en interprétant $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ comme un endomorphisme de $\mathbb{K}^n$: à partir d'une norme $\|\cdot\|$ sur $\mathbb{K}^n$ on définit sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ la norme :

$$|||A||| = \sup_{x \in \mathbb{K}^n \setminus \{0\}} \frac{\|Ax\|}{\|x\|} = \sup_{\|x\|=1} \|Ax\|.$$

Une telle norme est appelée une *norme d'opérateur*, puisqu'on interprète A comme un opérateur linéaire de $\mathbb{K}^n$ dans lui-même. Certains auteurs parlent de *norme subordonnée* (au choix de la norme sur $\mathbb{K}^n$).

Proposition 1.6 — *L'application* $A \mapsto |||A|||$ *définit une norme matricielle sur* $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

Remarque. Une norme d'opérateur vérifie toujours $|||I_n||| = 1$, ce qui montre que la norme de Frobenius, bien que norme matricielle, n'est pas une norme d'opérateur.

Exemple. La norme d'opérateur associée à la norme $\|\cdot\|_\infty$ de $\mathbb{K}^n$ est définie par : $|||A||| = \max\limits_{1 \leqslant i \leqslant n} \sum\limits_{j=1}^{n} |a_{ij}|$.

1.3 Suites dans un espace vectoriel normé

Définition. — *On dit qu'une suite (u_n) d'éléments d'un espace vectoriel normé* E converge *vers $\ell \in$ E lorsque la distance de u_n à ℓ tend vers 0 :* $\boxed{\lim\limits_{n \to +\infty} \|u_n - \ell\| = 0.}$ *Ceci revient donc à écrire :*

$$\forall \epsilon > 0, \quad \exists N \in \mathbb{N} \;\middle|\; n \geqslant N \Rightarrow \|u_n - \ell\| \leqslant \epsilon.$$

Géométriquement, cette dernière propriété se traduit ainsi : pour tout $\epsilon > 0$ il existe un rang à partir duquel tous les termes de la suite (u_n) sont dans la boule fermée de centre ℓ de rayon ϵ.

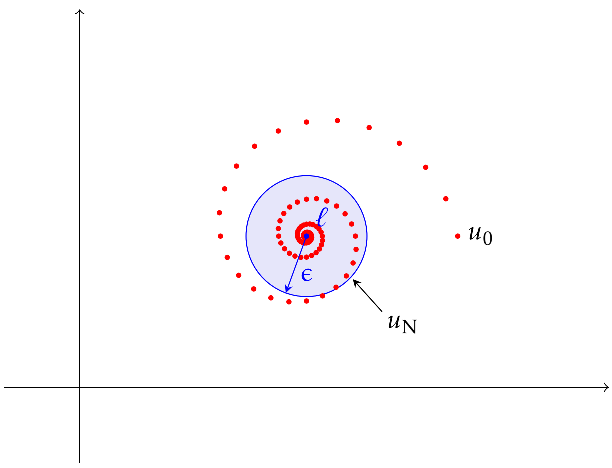


Figure 2 – À partir d'un certain rang, tous les termes de la suite (u_n) sont dans $\overline{B}(\ell, \epsilon)$.

Exercice 3. Soit E un espace vectoriel normé, et (u_n) une suite de vecteurs de E qui converge vers $\ell \in \mathrm{E}$. Prouver les propriétés suivantes :

a) la suite réelle $(\|u_n\|)$ converge vers $\|\ell\|$;

b) la suite (u_n) est bornée ;

c) toute suite extraite de (u_n) converge vers ℓ.

Remarque. la définition de la convergence dépend *a priori* du choix de la norme utilisée. Cependant, si deux normes sont équivalentes, la convergence pour l'une est équivalente à la convergence pour l'autre. Compte tenu du théorème 1.5, on en déduit :

Théorème 1.7 — *Dans un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie, la convergence d'une suite et la valeur de la limite ne dépendent pas du choix de la norme.*

Remarque. Ce théorème le suggère en creux : en dimension infinie, la notion de convergence dépend du choix de la norme. Et en effet, il est possible de donner des exemples de suites en dimension infinie qui vont converger pour une norme et diverger pour l'autre, voire des exemples de suites qui convergent vers des limites différentes suivant le choix de la norme !

Proposition 1.8 — *Soit* E *un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie, $(e_1,\ldots,e_p)$ une base de* E*, (u_n) une suite de vecteurs et $\ell \in \mathrm{E}$ un vecteur. On pose :*

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n = \sum_{k=1}^{p} u_{n,k} e_k \quad \text{et} \quad \ell = \sum_{k=1}^{p} \ell_k e_k.$$

Alors (u_n) converge vers ℓ si et seulement si pour tout $k \in [\![1,p]\!]$, la suite $(u_{n,k})$ converge vers ℓ_k.

Exercice 4. Soit $\mathrm{A} \in \mathcal{M}_p(\mathbb{K})$ telle que la suite (A^n) converge vers une matrice L. Montrer que L est une matrice de projection.

1.4 Le cas particulier des suites réelles

Parmi tous les $\mathbb{K}$-espaces vectoriels de dimension finies, $\mathbb{R}$ possède une particularité : c'est le seul à être naturellement muni d'une relation d'ordre. Celle-ci confère aux suites réelles des propriétés uniques qui n'ont pas d'équivalent dans le cadre des espaces vectoriels normés. Ces propriétés ont été vues dans le cours de première année, aussi allons-nous nous contenter d'en rappeler les énoncés.

■ Limites infinies

La première particularité des suites réelles est de caractériser deux cas particuliers de divergence : la divergence vers $-\infty$ et vers $+\infty$:

Définition. — *Une suite réelle (u_n)* diverge vers $+\infty$ *lorsque :* $\boxed{\forall \mathrm{A} \in \mathbb{R},\ \exists \mathrm{N} \in \mathbb{N} \ \big|\ n \geqslant \mathrm{N} \Rightarrow u_n \geqslant \mathrm{A}.}$
Une suite réelle (u_n) diverge vers $-\infty$ *lorsque :* $\forall \mathrm{A} \in \mathbb{R},\ \exists \mathrm{N} \in \mathbb{N} \ \big|\ n \geqslant \mathrm{N} \Rightarrow u_n \leqslant \mathrm{A}.$

Autrement dit, une suite (u_n) diverge vers $+\infty$ lorsque u_n est, à partir d'un certain rang, supérieure à une quantité arbitrairement grande A.

Proposition 1.9 — *Une suite réelle qui diverge vers $+\infty$ est minorée mais pas majorée.*

De même, une suite qui diverge vers $-\infty$ est majorée mais non minorée.

■ Compatibilité avec la relation d'ordre

Proposition 1.10 (passage à la limite dans une inégalité) — *Si (u_n) et (v_n) sont deux suites réelles convergeant respectivement vers α et β et vérifiant : $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n \leqslant v_n$, alors $\alpha \leqslant \beta$.*

Théorème 1.11 (encadrement) — *Soient (u_n), (v_n) et (w_n) trois suites réelles telles que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \leqslant v_n \leqslant w_n$. On suppose que (u_n) et (w_n) convergent vers la même limite ℓ. Alors (v_n) converge vers ℓ.*

Théorème 1.12 (minoration) — *Soient (u_n) et (v_n) deux suites réelles telles que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \leqslant v_n$. On suppose que (u_n) diverge vers $+\infty$. Alors (v_n) diverge vers $+\infty$.*

■ Suites monotones

Théorème 1.13 — *Une suite croissante et majorée converge ; une suite croissante et non majorée diverge vers $+\infty$.*

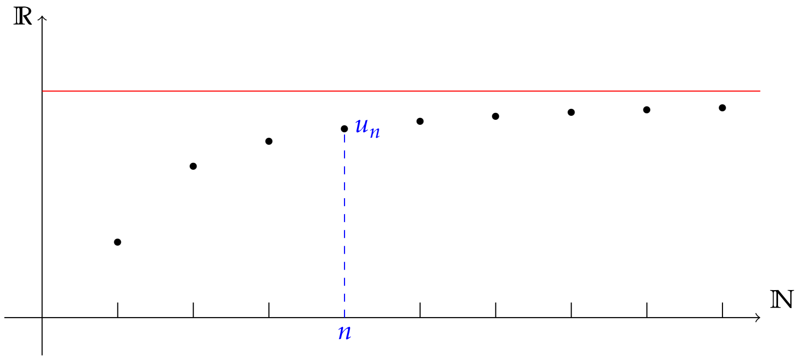


Figure 3 – La limite d'une suite croissante et majorée est la borne supérieure de la suite.

Remarque. Bien entendu, une suite décroissante est convergente lorsque elle est minorée, et diverge vers $-\infty$ dans le cas contraire.

Enfin, à la notion de suite monotone est attaché le concept de *suites adjacentes*, utile car fournissant une approximation par défaut et par excès de leut limite commune.

Définition. — *Deux suites (u_n) et (v_n) sont dites* adjacentes *lorsque (u_n) est croissante, (v_n) décroissante, et* $\lim\limits_{+\infty}(v_n - u_n) = 0$.

Théorème 1.14 — *Si (u_n) et (v_n) sont adjacentes, alors $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n \leqslant v_n$, et ces deux suites convergent vers la même limite ℓ ; ℓ est l'unique réel tel que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \leqslant \ell \leqslant v_n$.*

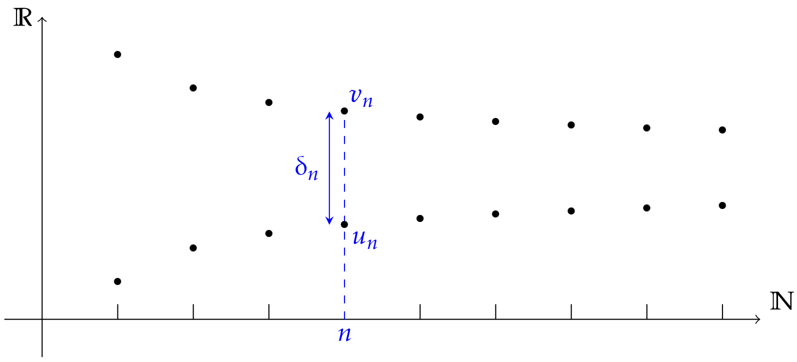


Figure 4 – L'écart entre deux suites adjacentes décroit et tend vers 0.

Exercice 5. On pose $a_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}$ et $b_n = a_n + \frac{1}{n.n!}$. Montrer que les deux suites (a_n) et (b_n) sont adjacentes, puis montrer que leur limite commune est irrationnelle.

Remarque. Nous aurons l'occasion de prouver plus tard dans l'année que la limite commune aux deux suites de cet exercice est le nombre de Neper e (la base du logarithme naturel). Les deux suites (a_n) et (b_n) permettent donc d'obtenir une approximation par défaut et par excès de cette quantité, en utilisant le script Python suivant.

```python
n, f = 1, 1
a = 2

while 1 / n / f > 1e-12:
    n += 1
    f *= n
    a += 1 / f

b = a + 1 / n / f
```

On notera qu'il n'y a pas de fonction factorielle en Python. Dans le script ci-dessus j'utilise l'invariant « $f = n!$ ».

```
In [1]: a, b
Out[1]: (2.71828182845823, 2.7182818284590495)
```

Si on fait abstraction des erreurs de calcul inhérentes à la manipulation des flottants en machine, nous pouvons affirmer que $2{,}718\,281\,828\,458\,23 < \mathrm{e} < 2{,}718\,281\,828\,459\,049\,5$, ce qui fournit les première décimales de $\mathrm{e} \approx 2{,}718\,281\,828\,45\cdots$.

1.5 Relations de comparaison

Peut-on dire qu'une suite converge lentement ou rapidement ? Dans l'absolu, cette question n'a pas de sens, puisque la notion de vitesse est une notion *relative*. Il importe donc d'avoir des éléments de comparaison, composés à la fois de *suites de référence* et d'*outils de comparaison*.

Rappel

Soient (u_n) et (v_n) deux suites réelles ou complexes telles que : $\forall n \in \mathbb{N},\ v_n \neq 0$.
On dit que u_n est *dominée* par v_n lorsque la suite $\left(\frac{u_n}{v_n}\right)$ est bornée. On note dans ce cas $u_n = \mathrm{O}(v_n)$.
On dit que u_n est *négligeable* devant v_n lorsque $\lim\limits_{+\infty} \frac{u_n}{v_n} = 0$. On note dans ce cas $u_n = \mathrm{o}(v_n)$.
On dit que (u_n) et (v_n) sont *équivalentes* lorsque $\lim\limits_{+\infty} \frac{u_n}{v_n} = 1$. On note dans ce cas $u_n \sim v_n$.

On peut noter que $\boxed{\text{les suites } (u_n) \text{ et } (v_n) \text{ sont équivalentes si et seulement si } u_n = v_n + \mathrm{o}(v_n).}$

Remarque. Les deux premières définitions s'étendent au cas où la suite (u_n) est une suite de vecteurs d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel normé.

• Suites de références
Ces notations n'ont d'intérêt que pour comparer des infiniment petits (des suites qui tendent vers 0) ou des infiniment grands (des suites qui tendent vers $+\infty$) entre eux. Si deux suites (u_n) et (v_n) convergent vers une limite commune ℓ, on comparera les suites $(u_n - \ell)$ à $(v_n - \ell)$ entre elles pour mesurer leurs vitesses de convergence relatives.

En outre, *dans la pratique* la suite (v_n) est le plus souvent une suite de référence, c'est-à-dire une suite dont on connait le comportement. En ce qui nous concerne, les suites de références au voisinage de $+\infty$ seront composées des fonctions $(\ln n)^\alpha$ (avec $\alpha > 0$), n^β (avec $\beta > 0$) et $\mathrm{e}^{\gamma n}$ (avec $\gamma > 0$). Au passage, rappelons que

$$\forall \alpha, \beta, \gamma > 0, \qquad \boxed{(\ln n)^\alpha = \mathrm{o}(n^\beta) \qquad \text{et} \qquad n^\beta = \mathrm{o}(\mathrm{e}^{\gamma n})}$$

Les suites de référence au voisinage de 0 sont les inverses des trois suites précédentes. Ainsi,

$$\mathrm{e}^{-\gamma n} = \mathrm{o}\left(\frac{1}{n^\beta}\right) \qquad \text{et} \qquad \frac{1}{n^\beta} = \mathrm{o}\left(\frac{1}{(\ln n)^\alpha}\right).$$

Exercice 6. Ordonner les suites ci-dessous à l'aide de la relation « *est négligeable devant* » :

$$n^2\mathrm{e}^n \qquad n\ln^2 n + n^2 \qquad \frac{n^3}{\ln n} \qquad \frac{\mathrm{e}^n}{n\ln n} \qquad n + \ln\sqrt{n} \qquad \frac{n^2}{n+\ln n} \qquad n^2\ln^2 n$$

■ Comparaison logarithmique

La notion que nous allons introduire consiste à comparer deux suites positives (concrètement une suite à étudier et une suite de référence) par le biais du quotient de deux termes consécutifs de ces suites. Cette technique repose sur le résultat suivant :

Lemme — *Si (u_n) et (v_n) sont deux suites de réels strictement positifs telles qu'à partir d'un certain rang, $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} \leqslant \dfrac{v_{n+1}}{v_n}$, alors $u_n = \mathrm{O}(v_n)$.*

Dans la pratique, nous nous contenterons de prendre pour l'une de ces deux suites une suite géométrique :

Proposition 1.15 (comparaison à une suite géométrique) — *Soit (u_n) une suite de réels strictement positifs. On suppose l'existence d'un réel positif a tel qu'à partir d'un certain rang, $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} \leqslant a$. Alors $u_n = \mathrm{O}(a^n)$.*
De même, s'il existe un rang à partir duquel $a \leqslant \dfrac{u_{n+1}}{u_n}$ alors $a^n = \mathrm{O}(u_n)$.

Exercice 7. Pour tout $n \geqslant 1$ on pose $u_n = \dfrac{n!}{n^n}$. Calculer la limite de $\dfrac{u_{n+1}}{u_n}$ et en déduire la limite de (u_n).

2. Séries numériques

2.1 Généralités

À une suite réelle ou complexe (u_n) on associe la suite (s_n) dont le terme général est défini par :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ s_n = \sum_{k=0}^{n} u_k.$$

La suite (s_n) est la suite des *sommes partielles* associée à la *série* $\sum u_n$ de terme général u_n.

Définition. — *On dit que la série $\sum u_n$* converge *lorsque la suite (s_n) converge, et qu'elle* diverge *dans le cas contraire. En cas de convergence, on pose :* $\mathrm{S} = \lim\limits_{+\infty} s_n$, *et on écrira :* $\mathrm{S} = \displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} u_k = \lim_{n\to+\infty} \sum_{k=0}^{n} u_k$.

Enfin, lorsque qu'une série converge, on appelle *reste* d'ordre n la quantité : $r_n = \mathrm{S} - s_n = \displaystyle\sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k$.

Exemple. Séries géométriques.

Soit $a \in \mathbb{C}$, et $u_n = a^n$. Si $a \neq 1$ on a $s_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} a^k = \frac{1-a^{n+1}}{1-a}$; si $a = 1$ on a $s_n = n+1$.

– Lorsque $|a| < 1$, $\lim_{+\infty} a^{n+1} = 0$ donc la série $\sum a^k$ converge, et $\sum_{k=0}^{+\infty} a^k = \dfrac{1}{1-a}$;

– Lorsque $|a| \geqslant 1$, la série $\sum a^k$ diverge en vertu de la proposition 2.1.

Attention. Les résultats concernant les opérations sur les limites permettent de prouver que la somme de deux séries convergentes est encore convergente, ou que le produit par un scalaire d'une série convergente est encore convergente. Attention néanmoins à ne pas commettre l'erreur suivante : la série $\sum (u_n + v_n)$ peut être convergente sans que les séries $\sum u_n$ et $\sum v_n$ le soient. Autrement dit, avant d'écrire que :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} (u_n + v_n) = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n + \sum_{n=0}^{+\infty} v_n$$

il faudra prendre la peine de vérifier que ces séries sont effectivement convergentes.

■ Correspondance fondamentale entre suites et séries

Nous avons associé à une suite (u_n) la suite (s_n) des sommes partielles de la série $\sum u_n$ de terme général u_n. Réciproquement, si (s_n) est une suite *quelconque* on peut, en posant : $u_0 = s_0$ et $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $u_n = s_n - s_{n-1}$, la faire apparaitre comme la suite des sommes partielles d'une certaine série. Cette égalité permet de déduire des propriétés de la suite (s_n) certains résultats qui concernent la suite (u_n), à commencer par la

Proposition 2.1 — *Si la série $\sum u_n$ converge, la suite (u_n) tend vers* 0.

Attention. Ce critère que nous venons d'énoncer n'assure pas à lui seul la convergence de la série ; il existe en effet de nombreuses séries divergentes dont le terme général tend vers 0. Il suffit pour cela que la suite (s_n) diverge et que la suite $(s_n - s_{n-1})$ tende vers 0. C'est le cas par exemple lorsque $s_n = \ln n$.

Mais l'exemple le plus connu est sans conteste la série *harmonique* $\sum \dfrac{1}{n}$. Les méthodes pour prouver la divergence de cette série sont très nombreuses, et nous verrons plus loin (dans la section « comparaison à une intégrale ») une méthode plus simple. Dans l'immédiat, nous allons raisonner par l'absurde en supposant la convergence de cette série. Dans ces conditions, la suite $s_{2n} - s_n$ converge vers 0. Mais

$$s_{2n} - s_n = \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{k} \geqslant \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{2n} = \frac{1}{2}$$

ce qui est contradictoire.

• **Égalité télescopique**
Lorsqu'on remplace u_k par $s_k - s_{k-1}$ pour $k \geqslant 1$ dans la relation $s_n = \sum_{k=0}^{n} u_k$ on obtient :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad s_n = s_0 + \sum_{k=1}^{n} (s_k - s_{k-1}).$$

Cette relation, lorsqu'elle est mise en évidence, permet le calcul de certaines sommes, comme par exemple dans l'exercice suivant.

Exercice 8. Prouver la convergence et calculer la somme $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n(n+1)}$.

2.2 Séries de nombres réels positifs

Considérons maintenant une suite (u_n) de nombres réels *positifs*. Pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a : $s_{n+1} - s_n = u_n \geqslant 0$, donc la suite des sommes partielles (s_n) est *croissante*. En conséquence :

$$\boxed{\text{la série } \sum u_n \text{ est convergente si et seulement si la suite } (s_n) \text{ des sommes partielles est majorée.}}$$

Nous allons tirer plusieurs conséquences de cette constatation :

Théorème 2.2 (comparaison) — *Soient (u_n) et (v_n) deux suites de nombres réels positifs telles que : $\forall n \in \mathbb{N}$, $0 \leqslant u_n \leqslant v_n$. Alors la convergence de la série $\sum v_n$ entraîne celle de $\sum u_n$, et la divergence de $\sum u_n$ celle de $\sum v_n$.*

Remarque. On peut remplacer l'hypothèse : $u_n \leqslant v_n$ par l'hypothèse : $u_n = \mathrm{O}(v_n)$. En effet, cette nouvelle hypothèse implique l'existence d'un réel $\mathrm{B} > 0$ tel que $u_n \leqslant \mathrm{B}v_n$, et il suffit alors d'appliquer le théorème aux séries $\sum u_n$ et $\sum \mathrm{B}v_n$. On peut donc énoncer le :

Corollaire — *Soient (u_n) et (v_n) deux suites de nombres réels* positifs *telles que : $u_n = \mathrm{O}(v_n)$. Alors la convergence de la série $\sum v_n$ entraîne celle de $\sum u_n$, et la divergence de $\sum u_n$ celle de $\sum v_n$.*

Exemples. La série $\sum \frac{n}{3^n}$ converge car $\frac{n}{3^n} = \mathrm{O}\left(\frac{1}{2^n}\right)$ et $\sum \frac{1}{2^n}$ converge.
La série $\sum \frac{\ln n}{n}$ diverge car $\frac{1}{n} = \mathrm{O}\left(\frac{\ln n}{n}\right)$ et $\sum \frac{1}{n}$ diverge.

Corollaire — *Deux séries $\sum u_n$ et $\sum v_n$ à terme général positif vérifiant : $u_n \sim v_n$ ont même nature*[1].

Attention. Ce résultat peut être mis en défaut lorsque les suites ne sont pas de signes constants. Cette erreur, très commune, à même été commise par Cauchy dans un article de 1823 consacré aux séries trigonométriques !

• **Séries de référence**
Ces deux derniers résultats nécessitent de posséder des séries de référence, c'est à dire des séries dont on connait la nature et à qui on compare les autres séries. En ce qui nous concerne, nos séries de référence seront les séries géométriques (étudiées à la section 2.1) et les séries de Riemann (étudiées à la section 2.3).

Exercice 9. En admettant le résultat du corollaire du théorème 2.4, étudier la nature des séries de terme général :

$$u_n = 3\ln(n^2+1) - 2\ln(n^3+1), \qquad v_n = \frac{a^n}{1+a^{2n}} \quad (a>0), \qquad w_n = \sqrt[n]{n} - 1, \qquad x_n = \frac{\ln n}{n^\alpha} \quad (\alpha > 0).$$

Enfin, la comparaison logarithmique à une série géométrique fournit le :

Théorème 2.3 (règle de d'Alembert) — *Soit (u_n) une suite de nombres réels strictement positifs, telle que $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = a$. Alors : si $a < 1$, la série $\sum u_n$ converge ; si $a > 1$ elle diverge.*

Attention. On ne peut rien conclure lorsque $a = 1$.

Cette règle s'avère particulièrement efficace dans le cas où le quotient $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ présente des simplifications notables, comme on pourra l'observer dans l'exercice suivant.

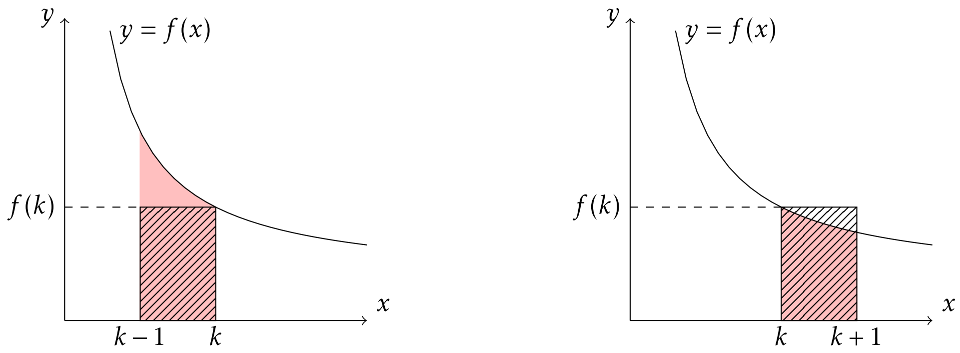
Exercice 10. Déterminer la nature de la série de terme général $u_n = \dfrac{2\times 4\times 6\times\cdots\times(2n)}{n^n}$.

2.3 Comparaison à une intégrale

Cette section concerne les séries de la forme $\sum f(n)$, où $f : [0, +\infty[\to \mathbb{R}_+$ est une fonction positive, continue par morceaux, et décroissante.
Observons les deux graphes représentés figure 5. Dans les deux cas, on compare l'aire hachurée, égale à $f(k)$, avec l'aire colorée, qui se calcule par l'intermédiaire d'une intégrale.

Pour tout $t \in [k-1, k]$, $f(k) \leqslant f(t)$ donc $f(k) = \int_{k-1}^{k} f(k)\,\mathrm{d}t \leqslant \int_{k-1}^{k} f(t)\,\mathrm{d}t$.

1. la *nature* d'une série est le fait pour elle d'être convergente ou divergente



$$\forall k \geqslant 1,\ f(k) \leqslant \int_{k-1}^{k} f(t)\,\mathrm{d}t \qquad\qquad \forall k \geqslant 0,\ \int_{k}^{k+1} f(t)\,\mathrm{d}t \leqslant f(k)$$

Figure 5 – Minoration et majoration de l'intégrale d'une fonction décroissante.

Pour tout $t \in [k, k+1]$, $f(t) \leqslant f(k)$ donc $\displaystyle\int_{k-1}^{k} f(t)\,\mathrm{d}t \leqslant \int_{k-1}^{k} f(k)\,\mathrm{d}t = f(k)$.
La première inégalité n'est valable que pour $k \geqslant 1$; en sommant on obtient :

$$\sum_{k=1}^{n} f(k) \leqslant \sum_{k=1}^{n} \int_{k-1}^{k} f(t)\,\mathrm{d}t \qquad \text{et donc} \qquad \boxed{\sum_{k=0}^{n} f(k) \leqslant f(0) + \int_{0}^{n} f(t)\,\mathrm{d}t} \tag{1}$$

En revanche, la seconde égalité est valable pour $k \geqslant 0$; en sommant on obtient :

$$\sum_{k=0}^{n} \int_{k}^{k+1} f(t)\,\mathrm{d}t \leqslant \sum_{k=0}^{n} f(k) \qquad \text{et donc} \qquad \boxed{\int_{0}^{n+1} f(t)\,\mathrm{d}t \leqslant \sum_{k=0}^{n} f(k)} \tag{2}$$

On en déduit :

Théorème 2.4 — *La série $\sum f(n)$ converge si et seulement si la suite $\left(\displaystyle\int_0^n f(t)\,\mathrm{d}t\right)$ converge.*

Remarque. Plus tard dans l'année nous dirons que l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t$ *converge*.

- **Séries de Riemann**

L'application de ce théorème aux fonctions $x \mapsto \dfrac{1}{x^\alpha}$ donne nos principales séries de référence :

Corollaire (Séries de Riemann) — $\boxed{\textit{La série } \sum \dfrac{1}{n^\alpha} \textit{ converge si et seulement si } \alpha > 1.}$

2.4 Équivalent des sommes partielles et des restes

Lorsque une série numérique converge, la suite des restes tend vers 0 (c'est un infiniment petit) ; il est donc légitime de chercher un équivalent simple du reste.
Lorsque une série à terme général positif diverge, la suite de ses sommes partielles diverge vers $+\infty$ (c'est un infiniment grand) ; il est donc légitime de chercher un équivalent simple de la somme partielle.
La technique de comparaison à une intégrale permet dans certains cas de répondre à ces questions.

Exemple. Nous avons : $\forall k \geqslant 1$, $\displaystyle\int_k^{k+1} \frac{\mathrm{d}t}{t^2} \leqslant \frac{1}{k^2} \leqslant \int_{k-1}^{k} \frac{\mathrm{d}t}{t^2}$, donc en sommant :

$$\int_{n+1}^{\mathrm{N}+1} \frac{\mathrm{d}t}{t^2} \leqslant \sum_{k=n+1}^{\mathrm{N}} \frac{1}{k^2} \leqslant \int_{n}^{\mathrm{N}} \frac{\mathrm{d}t}{t^2} \quad \text{ce qui donne :} \quad \frac{1}{n+1} - \frac{1}{\mathrm{N}+1} \leqslant \sum_{k=n+1}^{\mathrm{N}} \frac{1}{k^2} \leqslant \frac{1}{n} - \frac{1}{\mathrm{N}}.$$

En faisant tendre N vers $+\infty$ on obtient : $\dfrac{1}{n+1} \leqslant \displaystyle\sum_{k=n+1}^{+\infty} \dfrac{1}{k^2} \leqslant \dfrac{1}{n}$ et donc : $\displaystyle\sum_{k=n+1}^{+\infty} \dfrac{1}{k^2} \sim \dfrac{1}{n}$. Nous avons obtenu un équivalent du reste de la série convergente $\sum \dfrac{1}{n^2}$.

Exercice 11. Appliquer de nouveau la technique de comparaison à une intégrale, mais cette fois-ci pour encadrer une somme partielle d'une série divergente : $s_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \dfrac{1}{k}$.
En déduire un équivalent de cette somme lorsque n tend vers $+\infty$.

Remarque. Il est possible d'obtenir une formule plus précise que dans l'exercice précédent, en prouvant l'existence d'une constante $\gamma \approx 0{,}577\cdots$, appelée *constante d'Euler* vérifiant : $\boxed{\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} = \ln n + \gamma + o(1).}$ Son existence est prouvée de manière élémentaire dans l'exercice 30.

■ Un complément (hors programme)

Le résultat qui suit donne une méthode alternative pour déterminer un équivalent du reste d'une série convergente, ou de la somme partielle d'une série convergente, toujours dans le cadre d'une série à terme général positif. Ce résultat étant hors-programme, il doit être démontré avant d'être utilisé.

Proposition 2.5 — *Soient (u_n) et (v_n) deux suites à terme général positif telles que $u_n \sim v_n$. Alors :*

- *si $\sum u_n$ converge il en est de même de $\sum v_n$, et $\displaystyle\sum_{k=n+1}^{+\infty} v_k \underset{n\to+\infty}{\sim} \sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k$;*
- *si $\sum u_n$ diverge il en est de même de $\sum v_n$, et $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} v_k \underset{n\to+\infty}{\sim} \sum_{k=0}^{n} u_k$.*

2.5 Séries alternées

Nous allons maintenant étudier un cas particulier de séries à terme général réel, mais qui ne sont plus de signe constant. Nous adoptons la définition suivante :

Définition. — *Une série* alternée *est une série de la forme $\sum (-1)^n a_n$, la suite (a_n) étant formée de nombres réels positifs.*

L'intérêt de ces séries est que l'on dispose d'un critère très simple assurant leur convergence ; il s'agit du résultat suivant :

Théorème 2.6 (Critère spécial des séries alternées) — *Si (a_n) est une suite décroissante qui tend vers 0, la série alternée $\sum (-1)^n a_n$ est une série convergente.*

Exemple. La série $\sum \dfrac{(-1)^{n-1}}{n}$ vérifie les conditions du critère spécial des séries alternées, donc converge. Nous pouvons illustrer cette convergence en observant le comportement des sommes partielles grâce au script Python présenté figure 6.
Cette figure indique clairement comment procéder pour prouver ce théorème : montrer que les suites (s_{2n}) et (s_{2n+1}) sont adjacentes. Nous en déduirons aussi le résultat suivant :

Corollaire — *Si la série $\sum (-1)^n a_n$ vérifie les hypothèses du critère special des séries alternées, le reste $r_n = \displaystyle\sum_{k=n+1}^{+\infty} (-1)^k a_k$ vérifie : $|r_n| \leqslant a_{n+1}$. De plus, r_n est du signe de son premier terme, à savoir du signe de $(-1)^{n+1} a_{n+1}$.*

```
import matplotlib.pyplot as plt

s = 0
X = []
Y = []
for n in range(1, 31):
    s += (-1)**(n-1) / n
    X.append(n)
    Y.append(s)

plt.plot(X, Y, '-o')
```

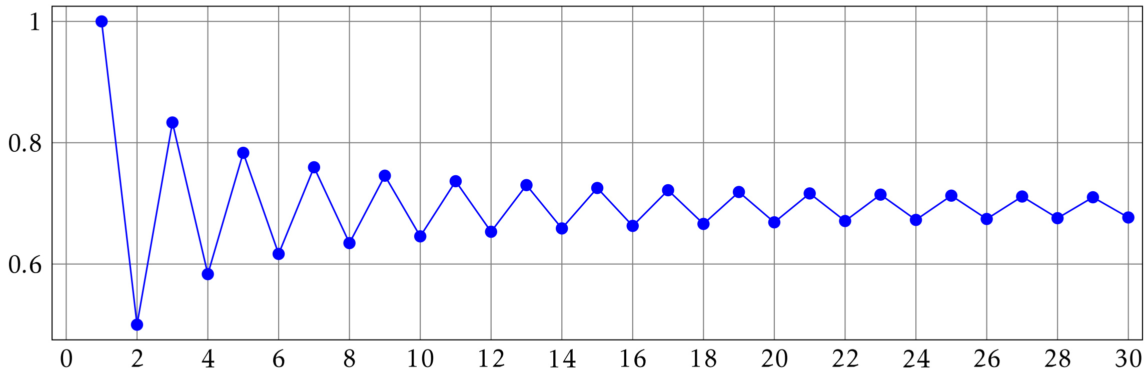


FIGURE 6 – La suite des sommes partielles de la série de terme général $\dfrac{(-1)^{n-1}}{n}$.

Remarque. Dans le cas particulier de la série $\sum \dfrac{(-1)^{n-1}}{n}$ il est possible, en séparant les termes pairs des termes impairs, d'en calculer la somme.

En effet on a : $s_{2p} = \displaystyle\sum_{n=1}^{2p} \frac{(-1)^{n-1}}{n} = \sum_{k=1}^{p} \frac{1}{2k-1} - \sum_{k=1}^{p} \frac{1}{2k} = \mathrm{I}_p - \mathrm{J}_p$, avec $\mathrm{I}_p = \displaystyle\sum_{k=1}^{p} \frac{1}{2k-1}$ et $\mathrm{J}_p = \displaystyle\sum_{k=1}^{p} \frac{1}{2k}$.

Par ailleurs, $\mathrm{I}_p + \mathrm{J}_p = \displaystyle\sum_{n=1}^{2p} \frac{1}{n} = \ln(2p) + \gamma + o(1)$, et $\mathrm{J}_p = \dfrac{1}{2}\displaystyle\sum_{k=1}^{p} \frac{1}{k} = \frac{1}{2}\ln p + \frac{\gamma}{2} + o(1)$ donc :

$$\mathrm{I}_p - \mathrm{J}_p = (\mathrm{I}_p + \mathrm{J}_p) - 2\mathrm{J}_p = \ln(2p) + \gamma - \ln p - \gamma + o(1) = \ln 2 + o(1).$$

En passant à la limite, $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} = \ln 2$.

Exercice 12. Soit $\alpha > 0$. Pour tout $n \geqslant 1$ on pose $u_n = \ln\left(1 + \dfrac{(-1)^n}{n^\alpha}\right)$. Effectuer un développement asymptotique à deux termes de u_n, puis expliquer comment l'utiliser pour prouver la convergence de la série $\sum u_n$.

2.6 Séries absolument convergentes

Le critère spécial relatif aux séries alternées s'applique dans un cadre relativement étroit : il faut que le terme général soit réel, de signe alterné et décroissante en valeur absolue, même si l'exercice 12 a montré comment il pouvait être utilisé dans un cadre *un peu* plus général.

Pour prouver la convergence d'une série à terme général complexe, ou à terme général réel mais sans alternance de signe, il ne reste alors (dans le cadre de notre programme) qu'une seule possibilité : l'absolue convergence, qui repose sur le théorème suivant :

Théorème 2.7 — *Si la série de terme général positif* $\sum |u_n|$ *converge, il en est de même de la série* $\sum u_n$*. On dit alors que la série* $\sum u_n$ *est* absolument convergente.

Remarque. Si la série $\sum u_n$ est absolument convergente, l'inégalité triangulaire se généralise en :

$$\left|\sum_{n=0}^{+\infty} u_n\right| \leqslant \sum_{n=0}^{+\infty} |u_n|.$$

Exemple. La fonction *zêta* de Riemann et la fonction *êta* de Dirichlet sont respectivement définies pour une variable complexe z par : $\zeta(z) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^z}$ et $\eta(z) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^z}$.

Si $z = x + iy$ avec $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, on a $\frac{1}{n^z} = \frac{e^{-iy\ln n}}{n^x}$ donc $\left|\frac{1}{n^z}\right| = \frac{1}{n^x}$; ainsi les fonction ζ et η sont (au moins) définies sur l'ensemble $\left\{z \in \mathbb{C} \mid \mathfrak{Re}(z) > 1\right\}$.

Exercice 13. Démontrer que lorsque $\mathfrak{Re}(z) > 1$, $\eta(z) = \left(1 - 2^{1-z}\right)\zeta(z)$.

■ Semi-convergence

Lorsque $x \in \mathbb{R}$, le critère spécial des séries alternées permet de prouver que $\eta(x)$ est définie pour $x > 0$. Plus généralement, une technique hors-programme (la transformation d'Abel) permet de prouver que $\eta(z)$ est définie lorsque $\mathfrak{Re}(z) > 0$.

Ainsi, lorsque $0 < x \leqslant 1$, la série $\sum \frac{(-1)^{n-1}}{n^x}$ est un exemple de série convergente *qui n'est pas absolument convergente*. On parle alors de série *semi-convergente*.

Comme exemple type de semi-convergence on pourra donc citer $\eta(1) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n}$, qui est une série convergente d'après le critère spécial, mais qui n'est pas absolument convergente car la série harmonique $\sum \frac{1}{n}$ diverge.

2.7 Produit de Cauchy de deux séries

Définition. — *Le* produit de Cauchy *de deux séries* $\sum u_n$ *et* $\sum v_n$ *est la série* $\sum w_n$ *de terme général*

$$\boxed{w_n = \sum_{i+j=n} u_i v_j.}$$

Remarque. L'expression de w_n doit être comprise ainsi : on réalise la somme de tous les termes de la forme $u_i v_j$ pour lesquels les entiers i et j vérifient la condition $i + j = n$.

Cette condition est équivalente aux conditions $i \in [\![0, n]\!]$ et $j = n - i$ donc on peut aussi écrire $w_n = \sum_{i=0}^{n} u_i v_{n-i}$.

Si en revanche on observe que $j \in [\![0, n]\!]$ et $i = n - j$ on écrira $w_n = \sum_{j=0}^{n} u_{n-j} v_j$.

Attention. Si la suite (u_n) n'est définie que pour $n \geqslant 1$, il faut adapter la définition : la suite w_n ne sera définie que pour $n \geqslant 1$ et la condition $i + j = n$ se traduira par $i \in [\![1, n]\!]$ et $j = n - i$ ou par $j \in [\![0, n-1]\!]$ et $i = n - j$:

$$\forall n \geqslant 1, \quad w_n = \sum_{i=1}^{n} u_i v_{n-i} = \sum_{j=0}^{n-1} u_{n-j} v_j.$$

De même, si (u_n) et (v_n) ne sont définies que pour $n \geqslant 1$ la suite (w_n) ne sera définie que pour $n \geqslant 2$ par

$$\forall n \geqslant 2, \quad w_n = \sum_{i=1}^{n-1} u_i v_{n-i} = \sum_{j=1}^{n-1} u_{n-j} v_j.$$

Lemme — *Soient $\sum a_n$ et $\sum b_n$ deux séries à terme général* positif *($a_n \geqslant 0$ et $b_n \geqslant 0$) et convergentes. Alors leur produit de Cauchy $\sum c_n$ converge, et :*

$$\sum_{n=0}^{+\infty} c_n = \Big(\sum_{n=0}^{+\infty} a_n\Big)\Big(\sum_{n=0}^{+\infty} b_n\Big).$$

Théorème 2.8 — *Soient $\sum u_n$ et $\sum v_n$ deux séries absolument convergentes. Alors leur produit de Cauchy $\sum w_n$ converge absolument, et*

$$\sum_{n=0}^{+\infty} w_n = \Big(\sum_{n=0}^{+\infty} u_n\Big)\Big(\sum_{n=0}^{+\infty} v_n\Big).$$

Exercice 14. Soit (u_n) une suite numérique telle que la série $\sum u_n$ converge absolument. En faisant apparaître un produit de Cauchy, montrer que la série de terme général $v_n = \dfrac{1}{2^n}\displaystyle\sum_{k=0}^{n} 2^k u_k$ converge absolument, puis exprimer sa somme.

2.8 La formule de Stirling : un équivalent de $n!$

La formule de Stirling fournit un équivalent de $n!$. Cette formule a été démontrée en deux temps : De Moivre prouve l'existence d'une constante C telle que $n! \sim \mathrm{C}\sqrt{n}\left(\dfrac{n}{\mathrm{e}}\right)^n$, puis Stirling trouve la valeur de cette constante, $\mathrm{C} = \sqrt{2\pi}$.

- **Le résultat de Moivre**

Exercice 15. Pour tout $n \geqslant 1$ on pose $u_n = \dfrac{n!}{n^n\,\mathrm{e}^{-n}\sqrt{n}}$ et $v_n = \ln\left(\dfrac{u_{n+1}}{u_n}\right)$. Prouver la convergence de la série $\sum v_n$ et en déduire l'existence d'une constante $\mathrm{C} > 0$ telle que $n! \sim \mathrm{C}n^n\,\mathrm{e}^{-n}\sqrt{n}$.

- **L'apport de Stirling**

Il repose sur les intégrales de Wallis $\mathrm{I}_n = \displaystyle\int_0^{\pi/2} (\sin t)^n\,\mathrm{d}t$.

Exercice 16.

a) À l'aide d'une intégration par parties, prouver que pour tout $n \geqslant 2$, $n\mathrm{I}_n = (n-1)\mathrm{I}_{n-2}$ et en déduire que pour tout $p \in \mathbb{N}$, $\mathrm{I}_{2p} = \dfrac{\pi}{2}\dfrac{(2p)!}{(2^p p!)^2}$ et $\mathrm{I}_{2p+1} = \dfrac{(2^p p!)^2}{(2p+1)!}$.

b) Justifier que pour tout $n \geqslant 2$, $\mathrm{I}_n \leqslant \mathrm{I}_{n-1} \leqslant \mathrm{I}_{n-2}$, et en déduire que $\lim \dfrac{\mathrm{I}_{n-1}}{\mathrm{I}_n} = 1$.

c) Exprimer $\lim \dfrac{\mathrm{I}_{2p}}{\mathrm{I}_{2p+1}}$ en fonction de la constante C et en déduire que $\mathrm{C} = \sqrt{2\pi}$.

Les résultats combinés de ces deux exercices prouvent la *formule de Stirling* : $\boxed{n! \sim \sqrt{2\pi n}\left(\dfrac{n}{\mathrm{e}}\right)^n.}$ Cette formule est à connaître mais la preuve n'est pas exigible.

3. Exercices

Espaces vectoriels normés

Exercice 17 Montrer que $\mathrm{N} : (x,y) \mapsto \sup_{t\in[0,1]} |x+ty|$ est une norme sur $\mathbb{R}^2$, et dessiner la sphère unité.

Exercice 18 Montrer que $\mathrm{N} : (x,y) \mapsto \sup_{t\in\mathbb{R}} \dfrac{|x+ty|}{1+t+t^2}$ est une norme sur $\mathbb{R}^2$, et dessiner la sphère unité.

Exercice 19 Soit E un espace vectoriel normé. Pour $a \in \mathrm{E}$ et $r > 0$ on note $\overline{\mathrm{B}}(a,r)$ la boule fermée de centre a de rayon r. Prouver les implications suivantes :

a) $\overline{\mathrm{B}}(a,r) \subset \overline{\mathrm{B}}(b,s) \Longrightarrow \|a-b\| \leqslant s-r$;

b) $\overline{\mathrm{B}}(a,r) \cap \overline{\mathrm{B}}(b,s) = \varnothing \Longrightarrow \|a-b\| > r+s$.

Exercice 20 Soit E un espace vectoriel normé. Pour $a \in \mathrm{E}$ et $r > 0$ on note $\overline{\mathrm{B}}(a,r)$ la boule fermée de centre a de rayon r. Prouver l'implication suivante : $\overline{\mathrm{B}}(a,r) = \overline{\mathrm{B}}(b,s) \Longrightarrow a = b$ et $r = s$.

Exercice 21 Soit $\mathrm{A} \in \mathcal{M}_p(\mathbb{K})$. On suppose que la suite de matrices $\mathrm{U}_n = \mathrm{I} + \mathrm{A} + \mathrm{A}^2 + \cdots + \mathrm{A}^n$ converge vers une matrice B. Montrer que $\mathrm{I}-\mathrm{A}$ est inversible et que $\mathrm{B} = (\mathrm{I}-\mathrm{A})^{-1}$.

Exercice 22 **Théorème de Cesàro**
Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie, et (u_n) une suite de E qui converge vers une limite ℓ. On définit la suite (v_n) par :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad v_n = \frac{u_1+u_2+\cdots+u_n}{n}.$$

a) Montrer que la suite (v_n) converge vers ℓ.

b) Montrer que la réciproque de ce résultat est fausse en donnant un exemple de suite (u_n) divergente bien que la suite (v_n) converge.

c) Déduire du théorème de Cesàro le résultat suivant : si (u_n) est une suite de réels strictement positifs qui vérifie $\lim \dfrac{u_{n+1}}{u_n} = a > 0$ alors $\lim \sqrt[n]{u_n} = a$.

Suites réelles

Exercice 23 Montrer que les suites (a_n) et (b_n) définies pour $n \geqslant 1$ par : $a_n = \sum_{k=1}^{n} \dfrac{1}{k} - \ln n$ et $b_n = a_n - \ln\Big(1+\dfrac{1}{n}\Big)$ sont adjacentes.

Exercice 24 On considère deux réels a et b vérifiant : $0 < a < b$, ainsi que les deux suites (u_n) et (v_n) définies par les relations :

$$\begin{cases} u_0 = a \\ v_0 = b \end{cases} \quad \text{et} \quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad \begin{cases} u_{n+1} = \sqrt{u_n v_n} \\ v_{n+1} = \dfrac{u_n+v_n}{2} \end{cases}$$

Montrer que ces deux suites sont adjacentes.

Exercice 25 On considère l'équation $(\mathrm{E}_n) : x^n + x^{n-1} + \cdots + x = 1$.

a) Montrer que pour tout $n \geqslant 1$ l'équation (E_n) possède une unique solution positive x_n, et que $x_n \in [1/2, 1]$.

b) Montrer que (x_n) converge et déterminer sa limite.

c) Montrer que $x_n = \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{2^{n+2}} + \mathrm{o}\Big(\dfrac{1}{2^n}\Big)$.

Exercice 26 Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ on pose $\mathrm{P}_n = \prod_{k=0}^{n-1} (\mathrm{X}-k)$.

a) Montrer que pour tout $n \geqslant 2$ il existe un unique réel $x_n \in [0,1]$ tel que $\mathrm{P}_n'(x_n) = 0$.

b) Déterminer la limite puis un équivalent de la suite (x_n).

Séries numériques

Exercice 27 Étudier la convergence des séries de terme général :

$$\frac{1}{\sqrt{n^2-1}}-\frac{1}{\sqrt{n^2+1}} \qquad \frac{\operatorname{ch} n}{\operatorname{ch}(2n)} \qquad 1-\sqrt[n]{\frac{n}{n+1}} \qquad \Big(n\sin\frac{1}{n}\Big)^{n^\alpha}\ (\alpha\in\mathbb{R}) \qquad \arccos\Big(\frac{2}{\pi}\arctan(n-2)\Big).$$

Exercice 28 Étudier à l'aide du critère de d'Alembert la nature de la série de terme général $u_n=\dfrac{n^{\ln n}}{n!}$.

Exercice 29 Discuter en fonction de $\alpha>0$ la nature de la série $\sum\dfrac{(n!)^\alpha}{(2n)!}$.

Exercice 30 Pour tout $n\in\mathbb{N}^*$ on pose $u_n=\sum_{k=1}^{n}\dfrac{1}{k}-\ln n$. Donner un équivalent simple de $u_{n+1}-u_n$, et en déduire l'existence d'une constante γ telle que $\sum_{k=1}^{n}\dfrac{1}{k}=\ln n+\gamma+\mathrm{o}(1)$.

Exercice 31 Soit $\sum u_n$ une série à terme général positif, et $v_n=\dfrac{u_n}{1+u_n}$. Montrer que les séries $\sum u_n$ et $\sum v_n$ ont même nature.

Exercice 32 Soit (u_n) une suite réelle à valeurs positives. Montrer que le produit infini $\prod_{n=0}^{+\infty}(1+u_n)$ converge si et seulement si la série $\sum u_n$ converge.

Exercice 33 Soit (u_n) une suite de réels strictement positifs ; on suppose qu'il existe $\alpha>1$ tel que :

$$\frac{u_{n+1}}{u_n}=1-\frac{\alpha}{n}+\mathrm{o}\Big(\frac{1}{n}\Big).$$

Utiliser une comparaison logarithmique avec une série de Riemann pour prouver la convergence de $\sum u_n$.

Exercice 34 **Séries de Bertrand.**
Une série de Bertrand est de la forme $\sum\dfrac{1}{n^\alpha(\ln n)^\beta}$ avec $\alpha>0$ et $\beta\in\mathbb{R}$.

a) Lorsque $\alpha>1$, montrer en utilisant le théorème de comparaison que la série de Bertrand associée converge.

b) Lorsque $\alpha<1$, montrer en utilisant le théorème de comparaison que la série de Bertrand associée diverge.

c) Lorsque $\alpha=1$, montrer en utilisant la technique de comparaison à une intégrale que la série de Bertrand converge si et seulement si $\beta>1$.

Exercice 35 En exploitant une comparaison série/intégrale, déterminer la limite : $\lim\limits_{a\to+\infty}\sum_{n=1}^{+\infty}\dfrac{a}{n^2+a^2}$.

Exercice 36 Déterminer la nature de la série de terme général $u_n=\sum_{k=n+1}^{2n}\dfrac{1}{k\sqrt{k}}$.

Exercice 37 Pour tout $n\geqslant1$ on pose $u_n=\dfrac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$ et $v_n=\dfrac{(-1)^n}{\sqrt{n}+(-1)^n}$. Montrer que les séries $\sum u_n$ et $\sum v_n$ ne sont pas de même nature bien que u_n soit équivalent à v_n.

Remarque. Cet exercice met en évidence l'importance de l'hypothèse de positivité dans le théorème 2.2 et ses deux corollaires.

Exercice 38 Déterminer la nature des séries $\sum\dfrac{(-1)^n}{n-(\ln n)^\alpha}$ (avec $\alpha\in\mathbb{R}$) et $\sum\sin\big(\pi\sqrt{n^2+1}\big)$.