

Réduction des endomorphismes

Réduire un endomorphisme, c'est trouver une base dans laquelle la matrice associée à cet endomorphisme est la plus simple possible, de manière à faciliter les calculs que l'on peut être amené à effectuer sur celui-ci. La réduction sans doute la plus utilisée en dimension finie est la réduction de Jordan, qui décompose l'espace en somme directe de sous-espaces stables, l'endomorphisme agissant de manière très simple sur chacun de ces sous-espaces.

Nous supposons les deux modules `numpy` et `numpy.linalg` importés par le biais des instructions :

```
import numpy as np
import numpy.linalg as alg
```

1. Introduction

Nous allons commencer par observer l'action de la réduction de Jordan sur un exemple, pour apprécier l'intérêt qu'il y a à réduire un endomorphisme.

Exemple. Considérons l'endomorphisme u de $E = \mathbb{R}^4$ défini par sa matrice sur la base canonique (e) :

$$\text{Mat}_{(e)} u = \begin{pmatrix} 5 & 4 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & 3 & 0 \\ 1 & 1 & -1 & 2 \end{pmatrix} = A$$

Nous allons effectuer le changement de base sur la base (e') définie par la matrice de passage :

$$\text{Mat}_{(e)}(e') = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} = P$$

Bien entendu, nous ne savons pas pour l'instant comment ont été trouvés ces vecteurs formant la nouvelle base ; c'est là tout l'enjeu de ce chapitre. Mais nous pouvons déjà observer le résultat de ce changement de base :

```
A = np.array([ [ 5,  4,  2,  1],
               [ 0,  1, -1, -1],
               [-1, -1,  3,  0],
               [ 1,  1, -1,  2] ])

P = np.array([ [-1,  0,  1, -1],
               [ 0,  0, -1,  1],
               [ 1, -1,  0,  0],
               [-1,  1,  1,  0] ])
```

```
In [1]: alg.inv(P).dot(A).dot(P)
```

```
Out[1]:
```

```
[[ 4.  1.  0.  0.]
 [ 0.  4.  0.  0.]
 [ 0.  0.  2.  0.]
 [ 0.  0.  0.  1.]]
```

Nous obtenons $\text{Mat}_{(e')}(u) = \begin{pmatrix} \boxed{4} & \boxed{1} & 0 & 0 \\ 0 & \boxed{4} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \boxed{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \boxed{1} \end{pmatrix}$. Cette nouvelle matrice est constituée de trois blocs diagonaux,

qui correspondent à la décomposition de l'espace en trois sous-espaces stables : $E = H_1 \oplus H_2 \oplus H_3$ avec $H_1 = \text{Vect}(e'_1, e'_2)$, $H_2 = \text{Vect}(e'_3)$, $H_3 = \text{Vect}(e'_4)$.

Sur les droites vectorielles H_2 et H_3 u agit comme une homothétie :

$$\forall x \in H_2, u(x) = 2x, \quad \forall x \in H_3, u(x) = x.$$

Sur le plan vectoriel H_1 , l'action de u est un peu plus compliquée : c'est l'addition d'une homothétie de rapport 4 et d'un endomorphisme nilpotent v défini par $v(e'_1) = 0_E$ et $v(e'_2) = e'_1$:

$$\forall x \in H_1, u(x) = 4x + v(x) \quad \text{avec } v^2(x) = 0_E.$$

Il est beaucoup plus facile de travailler avec la base (e') qu'avec la base (e) ; par exemple, le calcul de u^n s'obtient très simplement dans la base (e') :

$$\forall x \in H_1, u^n(x) = 4^n x + n4^{n-1}v(x), \quad \forall x \in H_2, u^n(x) = 2^n x, \quad \forall x \in H_3, u^n(x) = x$$

égalités qui se traduisent matriciellement par : $A^n = P \begin{pmatrix} 4^n & n4^{n-1} & 0 & 0 \\ 0 & 4^n & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2^n & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} P^{-1}$.

Exercice 1. On considère l'endomorphisme $u \in \mathcal{L}(\mathbb{K}^3)$ défini par la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

Déterminer les droites vectorielles stables par u , et en déduire une base (e) de \mathbb{K}^3 pour laquelle $\text{Mat}_{(e)}(u)$ est diagonale.

2. Éléments propres

Dans l'exemple introductif que nous venons de traiter, sur deux des sous-espaces de la décomposition (H_2 et H_3) l'endomorphisme agit comme une homothétie. Ce sont ces sous-espaces particuliers qui vont nous intéresser.

2.1 Valeurs et vecteurs propre

Dans cette section, sauf mention explicite du contraire, E désigne un \mathbb{K} -espace vectoriel, de dimension finie ou non.

DÉFINITION. — On dit qu'un scalaire $\lambda \in \mathbb{K}$ est une valeur propre d'un endomorphisme $u \in \mathcal{L}(E)$ lorsqu'il existe un vecteur non nul $x \in E$ tel que $u(x) = \lambda x$. Dans ce cas, on dit que x est un vecteur propre associé à la valeur propre λ .

On note $\text{Sp}(u)$ l'ensemble des valeurs propres de u ; c'est le spectre de u .

DÉFINITION. — Si λ est une valeur propre de u , on note $E_\lambda(u) = \text{Ker}(u - \lambda \text{Id}_E)$; il s'agit du sous-espace propre associé à la valeur propre λ . C'est un sous-espace vectoriel de E stable par u .

Attention. Le vecteur nul n'est pas un vecteur propre ; les vecteurs propres associés à une valeur propre λ sont les éléments non nuls du sous-espace propre $E_\lambda(u)$, sous-espace qui est au moins de dimension 1.

Remarque. La restriction de u au sous-espace propre $E_\lambda(u)$ est l'homothétie vectorielle de rapport λ .

Exercice 2. Soit $E = \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ le \mathbb{R} -espace vectoriel des applications de classe \mathcal{C}^∞ sur \mathbb{R} , et $D : f \mapsto f'$ l'opérateur de dérivation. Déterminer les éléments propres (valeurs et vecteurs propres) de D .

THÉORÈME 2.1 — Si $\lambda_1, \dots, \lambda_k$ sont des valeurs propres deux à deux distinctes de u , la somme $E_{\lambda_1}(u) \oplus \dots \oplus E_{\lambda_k}(u)$ est directe.

Chacun de ces sous-espaces propres étant au minimum de dimension 1, on en déduit :

COROLLAIRE — Si E est un espace vectoriel de dimension finie p , tout endomorphisme a au plus p valeurs propres distinctes.

■ Traduction matricielle en dimension finie

Considérons maintenant un \mathbb{K} -espace vectoriel E de dimension finie, et (e) une base de E . L'égalité $u(x) = \lambda x$ se traduit matriciellement par $AX = \lambda X$, où $A = \text{Mat}_{(e)}(u)$ et $X = \text{Mat}_{(e)}(x)$, ce qui nous amène aux définitions suivantes :

DÉFINITION. — Soit $A \in \mathcal{M}_p(\mathbb{K})$ une matrice carrée. Un scalaire $\lambda \in \mathbb{K}$ est une valeur propre de A lorsqu'il existe un vecteur colonne non nul $X \in \mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{K})$ tel que $AX = \lambda X$. Le vecteur X est un vecteur propre associé à la valeur propre λ . En outre, on appelle sous-espace propre associé à la valeur propre λ le sous-espace vectoriel :

$$\text{Ker}(A - \lambda I) = \{X \in \mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{K}) \mid AX = \lambda X\}.$$

D'après le corollaire du théorème 2.1, une matrice $p \times p$ ne peut avoir plus de p valeurs propres distinctes.

Il y a bien entendu parfaite équivalence entre éléments spectraux d'un endomorphisme et éléments spectraux d'une matrice qui lui est associée par le choix d'une base.

PROPOSITION 2.2 — Un scalaire λ est valeur propre de $A \in \mathcal{M}_p(\mathbb{K})$ si et seulement si $\det(A - \lambda I) = 0$.

Ce dernier résultat nous indique la démarche à suivre pour étudier les éléments propres en dimension finie :

1. déterminer les valeurs propres de A en résolvant l'équation $\det(A - \lambda I) = 0$;
2. pour chaque valeur propre λ , résoudre le système linéaire $(A - \lambda I)X = 0$ pour déterminer une base du sous-espace propre correspondant ;
3. Lorsque cela est possible, construire une base formée de vecteurs propres, et établir la formule de changement de base $A = PDP^{-1}$.

Exercice 3. Déterminer les éléments propres des matrices suivantes et le cas échéant, former une base de vecteurs propres :

$$A_1 = \begin{pmatrix} 5 & 2 & 6 \\ -4 & -1 & -8 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \quad A_2 = \begin{pmatrix} 5 & -3 & -2 \\ -3 & 5 & 2 \\ 6 & -6 & -2 \end{pmatrix} \quad A_3 = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ -4 & 6 & 1 \\ 4 & -4 & 2 \end{pmatrix}$$

2.2 Polynôme caractéristique

En dimension finie, nous venons de constater que déterminer les valeurs propres d'un endomorphisme $u \in \mathcal{L}(E)$ revient à résoudre l'équation $\det(u - \lambda \text{Id}_E) = 0$. Nous allons nous intéresser à la nature de cette équation, en démontrant qu'il s'agit d'une équation *polynomiale*.

Considérons une base quelconque (e) de E , et $A = \text{Mat}_e(u) = (a_{ij})$. Alors :

$$\det(x\text{Id}_E - u) = \det(xI - A) = \begin{vmatrix} x - a_{11} & -a_{12} & \dots & -a_{1p} \\ -a_{21} & x - a_{22} & \dots & -a_{2p} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -a_{p1} & -a_{p,p-1} & \dots & x - a_{pp} \end{vmatrix}$$

THÉORÈME 2.3 — L'application $x \mapsto \det(xI - A)$ est une fonction polynomiale ; le polynôme qui lui est associé est un polynôme unitaire de degré n appelé polynôme caractéristique de la matrice A . Il est noté χ_A .

Remarque. Le déterminant d'un endomorphisme ne dépendant pas de la base choisie pour effectuer le calcul, on définit de même le *polynôme caractéristique* d'un endomorphisme : le polynôme canoniquement associé à la fonction polynomiale $x \mapsto \det(x\text{Id}_E - u)$.

Exemple. Lorsque $A = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}$, son polynôme caractéristique est :

$$\chi_A(x) = \begin{vmatrix} x-a & -c \\ -b & x-d \end{vmatrix} = (x-a)(x-d) - bc = x^2 - (a+d)x + ad - bc = x^2 - (\text{tr } A)x + \det A.$$

Remarque. Pour une matrice $A \in \mathcal{M}_p(\mathbb{K})$ de taille $p \times p$, le coefficient constant de χ_A est égal à $(-1)^p \det A$ et le coefficient de X^{p-1} égal à $-\text{tr } A$.

Exercice 4. Soit E un \mathbb{C} -espace vectoriel de dimension $n \geq 2$, et $u \in \mathcal{L}(E)$ un endomorphisme de rang 2. Exprimer le polynôme caractéristique de u en fonction de $\text{tr } u$ et de $\text{tr } u^2$.

• Ordre de multiplicité d'une valeur propre

DÉFINITION. — les valeurs propres d'un endomorphisme u sont les racines de son polynôme caractéristique. On appelle ordre de multiplicité d'une valeur propre son ordre de multiplicité en tant que racine du polynôme caractéristique.

PROPOSITION 2.4 — Lorsque le polynôme caractéristique est scindé, notons $\lambda_1, \dots, \lambda_p$ les valeurs propres de u , en répétant autant de fois que sa multiplicité chacune des valeurs propres. Alors $\det u = \prod_{k=1}^p \lambda_k$ et $\text{tr } u = \sum_{k=1}^p \lambda_k$.

Enfin, on notera qu'il existe un lien entre ordre de multiplicité de la valeur propre et la dimension du sous-espace propre correspondant :

THÉORÈME 2.5 — La dimension d'un sous-espace propre est inférieure ou égale à l'ordre de multiplicité de la valeur propre correspondante.

Ce résultat a plusieurs conséquences intéressantes. Considérons par exemple une valeur propre simple (c'est à dire de multiplicité égale à 1). Le sous-espace propre associé n'étant pas réduit à $\{0_E\}$, on en déduit qu'il est obligatoirement de dimension 1.

Nous verrons d'autres conséquences de ce résultat dans les sections suivantes.

2.3 Diagonalisation en dimension finie

Dans toute cette section on suppose que E est un \mathbb{K} -espace vectoriel de dimension finie p .

DÉFINITION. — Un endomorphisme $u \in \mathcal{L}(E)$ est dit diagonalisable lorsqu'il existe une base (e) dans laquelle la matrice $\text{Mat}_{(e)}(u)$ est diagonale.

• Traduction matricielle

Considérons une base *quelconque* (e) , et $A = \text{Mat}_{(e)}(u)$. u est diagonalisable s'il existe une base (e') telle que $D = \text{Mat}_{(e')}(u)$ est diagonale. Si on note $P = \text{Mat}_{(e)}(e')$ la matrice de passage de (e) vers (e') nous disposons de la relation : $D = P^{-1}AP$, qu'on peut écrire $A = PDP^{-1}$. Ceci conduit à la définition :

DÉFINITION. — Une matrice carrée $A \in \mathcal{M}_p(\mathbb{K})$ est dite diagonalisable lorsqu'il existe une matrice inversible $P \in \mathcal{GL}_p(\mathbb{K})$ telle que $A = PDP^{-1}$.

Exemple. Les matrices A_1 et A_2 de l'exercice 3 sont diagonalisables : nous avons dans les deux cas trouvé une base formée de vecteurs propres.

Exercice 5. Soit $A \in \mathcal{M}_p(\mathbb{K})$ une matrice triangulaire supérieure dans laquelle tous les coefficients diagonaux sont égaux. Peut-elle être diagonalisable ?

Remarque. Lorsqu'un endomorphisme u est diagonalisable, la base (e) pour laquelle $\text{Mat}_{(e)}(u)$ est diagonale est constituée de vecteurs propres. Dès lors, on ne s'étonnera pas des nombreuses définitions équivalentes que l'on va obtenir en faisant intervenir la théorie spectrale.

THÉORÈME 2.6 — Soit $u \in \mathcal{L}(E)$ un endomorphisme de E , et $\text{Sp}(u) = \{\lambda_1, \dots, \lambda_k\}$ le spectre de u . Alors u est diagonalisable si et seulement si $E = E_{\lambda_1}(u) \oplus \dots \oplus E_{\lambda_k}(u)$.

COROLLAIRE — Soit $u \in \mathcal{L}(E)$ un endomorphisme de E , $\text{Sp}(u) = \{\lambda_1, \dots, \lambda_k\}$ le spectre de u . Alors u est diagonalisable si et seulement si $\sum_{i=1}^k \dim E_{\lambda_i}(u) = \dim E$.

Exemple. La matrice A_3 de l'exercice 3 n'est pas diagonalisable. Nous n'avons trouvé que deux sous-espaces propres, chacun de dimension 1.

COROLLAIRE — Un endomorphisme u de $\mathcal{L}(E)$ est diagonalisable si et seulement si son polynôme caractéristique est scindé sur le corps de base \mathbb{K} , et si pour toute valeur propre la dimension du sous-espace propre associé est égale à sa multiplicité dans le polynôme caractéristique.

Exemple. Reprenons une nouvelle fois les exemples de l'exercice 3 :

- le polynôme caractéristique de A_1 est égal à $(X-1)(X-2)(X-3)$; A_1 possède trois sous-espaces propres de dimension 1 donc A_1 est diagonalisable;
- le polynôme caractéristique de A_2 est égal à $(X-2)^2(X-4)$; le sous-espace propre associé à la valeur propre 2 est de dimension 2, celui associé à la valeur propre 4 de dimension 1, donc A_2 est diagonalisable;
- le polynôme caractéristique de A_3 est égal à $(X-2)^2(X-4)$; le sous-espace propre associé à la valeur propre 2 est de dimension 1 donc A_3 n'est pas diagonalisable.

• Un cas particulier

Lorsque E est de dimension p et lorsque u possède p valeurs propres distinctes, chacun des sous-espaces propres est de dimension au moins égale à 1 donc la somme des sous-espaces propres est au moins de dimension p . Ceci prouve que la somme de ces sous-espaces propres est égale à E , donc u est diagonalisable, et indique en plus que chacun de ces sous-espaces propres est de dimension 1. C'est le cas par exemple de la matrice A_1 .

Cette situation n'est pas caractéristique de tous les endomorphismes diagonalisables (comme le montre par exemple la matrice A_2), mais quand elle se produit, nous donne une façon simple de justifier que l'endomorphisme est diagonalisable :

PROPOSITION 2.7 — Si E est de dimension p et si $u \in \mathcal{L}(E)$ possède p valeurs propres distinctes alors u est diagonalisable.

Exercice 6. Soit $z \in \mathbb{C}$. Montrer que la matrice $M(x) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & z \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_3(\mathbb{C})$ est diagonalisable, sauf pour deux valeurs de z qu'on précisera.

Attention. Pour finir cette section, observons que la dernière caractérisation de la diagonalisation fait intervenir le corps de base \mathbb{K} . Lorsqu'il s'agit de diagonaliser un endomorphisme, le corps de base est imposé par l'espace vectoriel, mais lorsqu'il s'agit de diagonaliser une matrice à coefficients réels, il est possible de la considérer comme un élément de $\mathcal{M}_p(\mathbb{R})$ mais aussi comme un élément de $\mathcal{M}_p(\mathbb{C})$. En d'autres termes, une matrice à coefficients réels peut être diagonalisable dans $\mathcal{M}_p(\mathbb{C})$ sans être diagonalisable dans $\mathcal{M}_p(\mathbb{R})$.

Considérons par exemple la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$. On calcule $\chi_A = (X-1)^2 + 1$, donc A n'a pas de valeurs propres réelles : elle n'est pas diagonalisable dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$. En revanche, elle dispose de deux valeurs propres complexes distinctes $1-i$ et $1+i$ donc est diagonalisable dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{C})$.

2.4 Projecteurs spectraux d'un endomorphisme diagonalisable

Considérons une projection vectorielle $p \in \mathcal{L}(E)$ sur H_1 parallèlement à H_2 : on a $E = H_1 \oplus H_2$, et dans une base

(e) adaptée à cette décomposition on a $\text{Mat}_{(e)}(p) = \begin{pmatrix} \boxed{1 \diagdown 1} & \\ & \boxed{0 \diagdown 0} \end{pmatrix}$; p est diagonalisable, $\text{Sp}(p) = \{0, 1\}$, et

$H_1 = \text{Ker}(p - \text{Id}_E)$ et $H_2 = \text{Ker } p$ sont les sous-espaces propres associés.

On peut de même considérer la symétrie vectorielle $s \in \mathcal{L}(E)$ par rapport à H_1 , parallèlement à H_2 : sur la même

base (e) on a cette fois $\text{Mat}_{(s)}(s) = \begin{pmatrix} \boxed{1 \diagdown 1} & \\ & \boxed{-1 \diagdown -1} \end{pmatrix}$; s est diagonalisable, $\text{Sp}(s) = \{-1, 1\}$, $H_1 = \text{Ker}(s - \text{Id}_E)$ et

$H_2 = \text{Ker}(s + \text{Id}_E)$. Observons enfin que $s = p - (\text{Id}_E - p) = 1 \times p_1 + (-1) \times p_2$, où $p_1 = p$ est la projection vectorielle sur H_1 parallèlement à H_2 et $p_2 = \text{Id}_E - p$ est la projection vectorielle sur H_2 parallèlement à H_1 .

Considérons enfin un endomorphisme diagonalisable $u \in \mathcal{L}(E)$, et la décomposition de E en somme des sous-espaces propres : $E = E_{\lambda_1}(u) \oplus \dots \oplus E_{\lambda_k}(u)$. Si (e) est une base adaptée à la décomposition de l'espace, nous avons :

$$\text{Mat}_e(u) = \begin{pmatrix} \boxed{\lambda_1 \diagdown \lambda_1} & & & \\ & \boxed{\lambda_2 \diagdown \lambda_2} & & \\ & & \dots & \\ & & & \boxed{\lambda_k \diagdown \lambda_k} \end{pmatrix}$$

La famille (p_1, \dots, p_k) associée à cette décomposition de l'espace est appelée la famille des *projecteurs spectraux* de u . Rappelons que pour tout $i \in \llbracket 1, k \rrbracket$, p_i est la projection sur $E_{\lambda_i}(u)$ parallèlement à $\bigoplus_{j \neq i} E_{\lambda_j}(u)$. Ainsi,

$$\text{Mat}_e(p_i) = \begin{pmatrix} \boxed{0 \diagdown 0} & & & \\ & \boxed{1 \diagdown 1} & & \\ & & \dots & \\ & & & \boxed{0 \diagdown 0} \end{pmatrix}$$

← i^{e} bloc

On dispose alors de manière évidente des égalités $\text{Id}_E = \sum_{j=1}^k p_j$ et $u = \sum_{j=1}^k \lambda_j p_j$, et plus généralement :

PROPOSITION 2.8 — Pour tout entier $n \in \mathbb{N}$ on a
$$u^n = \sum_{j=1}^k \lambda_j^n p_j.$$

Remarque. Lorsque u est inversible (c'est à dire lorsque 0 n'est pas valeur propre de u) cette formule s'étend sur \mathbb{Z} .

• **interprétation matricielle**

Considérons la diagonalisation de la matrice A_1 obtenue dans l'exercice 3 : $A_1 = PDP^{-1}$ avec $D = \begin{pmatrix} 1 & & \\ & 2 & \\ & & 3 \end{pmatrix}$.

Dans la base de diagonalisation, les trois projecteurs spectraux sont associés aux matrices

$$\begin{pmatrix} 1 & & \\ & 0 & \\ & & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & & \\ & 1 & \\ & & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & & \\ & 0 & \\ & & 1 \end{pmatrix}.$$

Dans la base initiale, les trois projecteurs spectraux sont donc associés aux matrices

$$U = P \begin{pmatrix} 1 & & \\ & 0 & \\ & & 0 \end{pmatrix} P^{-1}, \quad V = P \begin{pmatrix} 0 & & \\ & 1 & \\ & & 0 \end{pmatrix} P^{-1}, \quad W = P \begin{pmatrix} 0 & & \\ & 0 & \\ & & 1 \end{pmatrix} P^{-1}.$$

On a $I = U + V + W$, $A_1 = U + 2V + 3W$, et plus généralement : $\forall n \in \mathbb{N}$, $A_1^n = P \begin{pmatrix} 1 & & \\ & 2^n & \\ & & 3^n \end{pmatrix} P^{-1} = U + 2^n V + 3^n W$;

le calcul des matrices U , V et W permet donc d'exprimer aisément A_1^n .

Définissons en Python les trois matrices associés aux projecteurs spectraux de A_1 :

```
P = np.array([ [-1, -2, -1],
               [ 2,  0,  1],
               [ 0,  1,  0] ])

U = P.dot(np.diag([1, 0, 0])).dot(alg.inv(P))
V = P.dot(np.diag([0, 1, 0])).dot(alg.inv(P))
W = P.dot(np.diag([0, 0, 1])).dot(alg.inv(P))
```

Vérifions la validité de la formule $A_1^n = U + 2^n V + 3^n W$ pour $n = 5$:

```
In [1]: U + 2**5 * V + 3**5 * W
Out[1]: array([[ 485.,  242.,  906.],
               [-484., -241., -968.],
               [  0.,   0.,  32.]])

In [2]: alg.matrix_power(A1, 5)
Out[2]: array([[ 485,  242,  906],
               [-484, -241, -968],
               [  0,   0,  32]])
```

Exercice 7. On considère la matrice A_2 de l'exercice 3. Justifier l'existence (mais sans les calculer) de deux matrices U et V telles que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $A_2^n = 2^n U + 4^n V$.

Montrer que ces matrices U et V peuvent s'exprimer en fonction des matrices I et A , et en déduire une expression de A^n en fonction de I et de A .

■ **Application à la recherche du commutant d'un endomorphisme diagonalisable**

Considérons un endomorphisme u diagonalisable, et posons $\text{Sp}(u) = \{\lambda_1, \dots, \lambda_k\}$. Nous allons chercher à caractériser le *commutant* de u , c'est-à-dire l'ensemble des endomorphismes $v \in \mathcal{L}(E)$ qui vérifient : $u \circ v = v \circ u$.

Le raisonnement que nous allons tenir tient essentiellement au fait suivant :

$$\text{pour tout } x \in E_{\lambda_i}(u), \quad u(v(x)) = u \circ v(x) = v \circ u(x) = v(u(x)) = v(\lambda_i x) = \lambda_i v(x)$$

égalité qui montre que pour tout $x \in E_{\lambda_i}(u)$, $v(x) \in E_{\lambda_i}(u)$: la sous-espace propre $E_{\lambda_i}(u)$ est stable par v .

Ceci montre que dans une base adaptée à la décomposition de l'espace en somme de sous-espaces propres, la matrice associée à v est diagonale par blocs.

Bref, dans une telle base nous avons :

$$\text{Mat}_{(e)}(u) = \begin{pmatrix} \boxed{\lambda_1 I} & & & \\ & \boxed{\lambda_2 I} & & \\ & & \ddots & \\ & & & \boxed{\lambda_k I} \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \text{Mat}_{(e)}(v) = \begin{pmatrix} \boxed{A_1} & & & \\ & \boxed{A_2} & & \\ & & \ddots & \\ & & & \boxed{A_k} \end{pmatrix}$$

Réciproquement, il est évident que ces deux matrices (et donc les endomorphismes u et v) commutent. Nous avons donc prouvé la

PROPOSITION 2.9 — Si u est un endomorphisme diagonalisable, les endomorphismes qui commutent avec u sont ceux qui laissent stables les sous-espaces propres.

COROLLAIRE — Lorsque le polynôme caractéristique de u est scindé à racines simples, le commutant est un espace de dimension $p = \dim E$, et les projecteurs spectraux de u en constituent une base.

Exercice 8. Soit $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ une matrice admettant -1 et 8 pour valeurs propres. Justifier l'existence d'une unique matrice $B \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ vérifiant $B^3 = A$, puis exprimer B en fonction de I et de A .

2.5 Matrices et endomorphismes trigonalisables

Nous n'avons pour l'instant pas abordé le cas des endomorphismes non diagonalisables car ce n'est pas un des objectifs principaux de ce cours, mais nous en avons vu un exemple avec la matrice A_3 de l'exercice 3. Nous allons montrer maintenant qu'à défaut d'être diagonalisable, cette matrice est *trigonalisable*, c'est-à-dire semblable à une matrice triangulaire supérieure.

Exercice 9. Trouver une matrice inversible P telle que $A_3 = P \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} P^{-1}$.

Ceci nous amène aux définitions suivantes :

DÉFINITION. — Un endomorphisme $u \in \mathcal{L}(E)$ est dit *trigonalisable* s'il existe une base de E dans laquelle la matrice associée à u est triangulaire supérieure.

Une matrice A est dite *trigonalisable* si et seulement si elle est semblable à une matrice triangulaire supérieure, c'est à dire s'il existe une matrice triangulaire supérieure T et une matrice inversible P telles que $A = PTP^{-1}$.

Le résultat majeur dont on dispose est le suivant :

THÉORÈME 2.10 — Un endomorphisme $u \in \mathcal{L}(E)$ (ou une matrice $A \in \mathcal{M}_p(\mathbb{K})$) est trigonalisable si et seulement si son polynôme caractéristique est scindé.

Remarque. Puisque tout polynôme complexe est scindé, une conséquence importante de ceci est que toute matrice est trigonalisable dans $\mathcal{M}_p(\mathbb{C})$, mais pas nécessairement dans $\mathcal{M}_p(\mathbb{R})$.

2.6 Polynômes annulateurs (notion hors programme)

Sur $\mathcal{L}(E)$ l'opérateur de composition $(u, v) \mapsto u \circ v$ est *associatif*, c'est-à-dire vérifie la relation $u \circ (v \circ w) = (u \circ v) \circ w$. Cette propriété permet de définir sans ambiguïté l'endomorphisme u^n ($n \in \mathbb{N}$) en convenant que $u^0 = \text{Id}$ et $u^{n+1} = u^n \circ u = u \circ u^n$.

Ceci permet, à partir d'un polynôme $P = \sum_{k=0}^n a_k X^k$, de définir l'endomorphisme $P(u) = \sum_{k=0}^n a_k u^k$.

Nous pouvons déjà énoncer un premier résultat, qui généralise la proposition 2.8 :

PROPOSITION 2.11 — *Si u est un endomorphisme diagonalisable et $P \in \mathbb{K}[X]$ un polynôme, alors $P(u)$ est diagonalisable. De plus, si $\text{Sp}(u) = \{\lambda_1, \dots, \lambda_k\}$ alors $\text{Sp}(P(u)) = \{P(\lambda_1), \dots, P(\lambda_k)\}$, et si p_1, \dots, p_k sont les projecteurs spectraux*

de u alors $P(u) = \sum_{j=1}^k P(\lambda_j) p_j$.

Traduit matriciellement, ce résultat s'énonce de la façon suivante :

COROLLAIRE — *Si A est une matrice diagonalisable et $P \in \mathbb{K}[X]$ un polynôme, alors $P(A)$ est diagonalisable et*

$$A = Q \begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_p \end{pmatrix} Q^{-1} \implies P(A) = Q \begin{pmatrix} P(\lambda_1) & & \\ & \ddots & \\ & & P(\lambda_p) \end{pmatrix} Q^{-1}.$$

DÉFINITION. — *On appelle polynôme annulateur de $u \in \mathcal{L}(E)$ un polynôme $P \in \mathbb{K}[X]$ tel que $P(u) = 0$.*

La proposition 2.11 montre que si u est diagonalisable et $\text{Sp}(u) = \{\lambda_1, \dots, \lambda_k\}$, le polynôme $P = (X - \lambda_1) \cdots (X - \lambda_k)$ est un polynôme scindé et à racines simples de u , annulateur de u . Le théorème 2.13 que nous verrons plus loin (mais qui est hors programme) énonce une réciproque de ce résultat, mais nous pouvons déjà énoncer un résultat simple et utilisable en restant dans le cadre du programme de PC* :

PROPOSITION 2.12 — *Si P est un polynôme annulateur de u , toute valeur propre de u est racine de P .*

Mais le résultat majeur (hors programme, rappelons-le) est le résultat suivant :

THÉORÈME 2.13 — *Soit E est \mathbb{K} -espace vectoriel de dimension finie, et $u \in \mathcal{L}(E)$ un endomorphisme qui possède un polynôme annulateur scindé à racines simples. Alors u est diagonalisable.*

On notera qu'il existe des exercices simples qui demandent de prouver ce résultat dans des cas particuliers, et qui se traitent par analyse / synthèse. par exemple :

Exercice 10. Soit u un endomorphisme de E tel que $u^3 + u = 0$. Montrer que $E = \text{Ker } u \oplus \text{Ker}(u^2 + \text{Id})$.
Montrer que lorsque E est un \mathbb{C} -espace vectoriel, on a en plus $\text{Ker}(u^2 + \text{Id}) = \text{Ker}(u - i\text{Id}) \oplus \text{Ker}(u + i\text{Id})$.

L'exercice 20 est un autre exemple de ce type d'exercice.

Ce théorème permet d'aborder le problème de la diagonalisation avec une approche différente de celle que nous sommes amenés à utiliser pour rester dans le cadre du programme, et propose dans certains cas des preuves bien plus simples, en particulier pour prouver le résultat suivant :

PROPOSITION 2.14 — *Soit $u \in \mathcal{L}(E)$ un endomorphisme diagonalisable, H un sous-espace vectoriel de E stable par u , et $u_H \in \mathcal{L}(H)$ la restriction de u à H . Alors u_H est un endomorphisme diagonalisable de H .*

3. Récurrences linéaires à coefficients constants

La dernière partie de ce chapitre va être consacrée à une application de la réduction des endomorphismes : la résolution des récurrences linéaires à coefficients constants, autrement dit, trouver une expression de u_n en fonction de n lorsque la suite u est définie par la donnée de p valeurs u_0, \dots, u_{p-1} et d'une relation de récurrence :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+p} = a_0 u_n + a_1 u_{n+1} + \dots + a_{p-1} u_{n+p-1}.$$

Pour résoudre ce type d'équation, on introduit le vecteur $X_n = \begin{pmatrix} u_n \\ u_{n+1} \\ \vdots \\ u_{n+p-1} \end{pmatrix}$. Ce dernier vérifie la relation matricielle :

$$\begin{pmatrix} u_{n+1} \\ u_{n+2} \\ \vdots \\ u_{n+p} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & 1 & \dots \\ a_0 & a_1 & \dots & \dots & a_{p-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_n \\ u_{n+1} \\ \vdots \\ u_{n+p-1} \end{pmatrix} \quad \text{soit} \quad X_{n+1} = AX_n.$$

Ainsi nous avons $X_n = A^n X_0$, et le problème se ramène au calcul des puissances de la matrice A .

3.1 Étude du cas $p = 2$

Avant de traiter le cas général nous allons nous intéresser au cas où $p = 2$, autrement dit aux suites définies par la donnée de u_0 et u_1 et de la relation de récurrence : $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+2} = a_0 u_n + a_1 u_{n+1}$.

En posant $X_n = \begin{pmatrix} u_n \\ u_{n+1} \end{pmatrix}$ nous avons $X_{n+1} = AX_n$ avec $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ a_0 & a_1 \end{pmatrix}$, et $X_n = A^n X_0$.

On calcule $\chi_A(X) = X(X - a_1) - a_0 = X^2 - a_1 X - a_0$. Trois cas sont donc possibles :

- Lorsque χ_A possède deux racines distinctes $\lambda \neq \mu$.

Le polynôme caractéristique est scindé à racines simples donc A est diagonalisable : il existe une matrice inversible $P \in \mathcal{GL}_2(\mathbb{K})$ telle que $A = P \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \mu \end{pmatrix} P^{-1}$. Introduisons les projecteurs spectraux $U = P \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} P^{-1}$ et

$V = P \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} P^{-1}$ dans ce calcul : alors pour tout $n \in \mathbb{N}$, $A^n = \lambda^n U + \mu^n V$.

Ainsi, $X_n = A^n X_0 = \lambda^n U X_0 + \mu^n V X_0$. En posant $U X_0 = \begin{pmatrix} \alpha \\ \alpha' \end{pmatrix}$ et $V X_0 = \begin{pmatrix} \beta \\ \beta' \end{pmatrix}$ nous avons prouvé l'existence de deux constantes α et β telles que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\boxed{u_n = \alpha \lambda^n + \beta \mu^n}$.

Remarque. Les constantes α et β dépendent du vecteur X_0 donc des valeurs initiales u_0 et u_1 . Et en effet elles sont le plus souvent obtenues à partir des relations $u_0 = \alpha + \beta$ et $u_1 = \alpha \lambda + \beta \mu$ qui fournissent les égalités :

$$\alpha = \frac{u_1 - \mu u_0}{\lambda - \mu} \quad \text{et} \quad \beta = \frac{u_1 - \lambda u_0}{\mu - \lambda}.$$

- Lorsque χ_A possède une racine double λ .

La matrice A n'est pas diagonalisable (en effet, un endomorphisme diagonalisable ayant une seule valeur propre est nécessairement une homothétie vectorielle). En revanche, puisque $\chi_A = (X - \lambda)^2$ est scindé, la matrice A est trigonalisable : il existe une matrice inversible $P \in \mathcal{GL}_2(\mathbb{K})$ telle que $A = P \begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix} P^{-1}$. Posons $U = P \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} P^{-1}$;

alors $A = \lambda I + U$. Or il est facile de prouver par récurrence que $\begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}^n = \begin{pmatrix} \lambda^n & n \lambda^{n-1} \\ 0 & \lambda^n \end{pmatrix}$ et ainsi : $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $A^n = \lambda^n I + n \lambda^{n-1} U$.

Ainsi, $X_n = \lambda^n X_0 + n \lambda^{n-1} U X_0$ et en posant $X_0 = \begin{pmatrix} \alpha \\ \alpha' \end{pmatrix}$ et $U X_0 = \begin{pmatrix} \beta \\ \beta' \end{pmatrix}$ nous avons prouvé l'existence de deux constantes α et β telles que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\boxed{u_n = \alpha \lambda^n + \beta n \lambda^{n-1}}$.

Remarque. Là encore les constantes α et β se déterminent à partir des relations initiales $u_0 = \alpha$ et $u_1 = \alpha \lambda + \beta$ qui fournissent les égalités :

$$\alpha = u_0 \quad \text{et} \quad \beta = u_1 - \lambda \alpha.$$

• **Lorsque χ_A ne possède pas de racine.**

Cette situation ne peut arriver que lorsque le corps de base est \mathbb{R} . Mais dans ce cas, le polynôme réel χ_A possède deux racines complexes conjuguées distinctes λ et $\mu = \bar{\lambda}$. Le premier cas s'applique et on peut affirmer l'existence de deux constantes complexes α et β telles que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = \alpha\lambda^n + \beta\bar{\lambda}^n$.

Pour calculer les puissances d'un nombre complexe il est préférable que ce dernier soit écrit sous forme trigonométrique, aussi allons-nous poser $\lambda = \rho e^{i\theta}$ avec $\rho > 0$ et $\theta \in]0, 2\pi[$. Alors :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n = \rho^n (\alpha e^{in\theta} + \beta e^{-in\theta}) = \rho^n ((\alpha + \beta) \cos(n\theta) + (\alpha - \beta) \sin(n\theta))$$

En posant $a = \alpha + \beta$ et $b = i(\alpha - \beta)$ nous avons prouvé l'existence de deux constantes a et b telles que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = a\rho^n \cos(n\theta) + b\rho^n \sin(n\theta)$.

Remarque. Les conditions initiales $u_0 = a$ et $u_1 = a\rho \cos \theta + b\rho \sin \theta$ fournissent les égalités

$$a = u_0 \quad \text{et} \quad b = \frac{u_1 - u_0 \rho \cos \theta}{\rho \sin \theta}$$

qui montrent au passage que les constantes a et b sont forcément réelles.

3.2 Le cas général

Revenons maintenant au cas général, en suivant la même démarche que le cas $p = 2$. La première étape consiste à calculer le polynôme caractéristique de la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ & & \ddots & & \\ & & & \ddots & \\ 0 & & & & 1 \\ a_0 & a_1 & \dots & & a_{p-1} \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_p(\mathbb{K})$$

THÉORÈME 3.1 — $\chi_A(X) = X^p - a_{p-1}X^{p-1} - \dots - a_1X - a_0$.

• **Lorsque le polynôme χ_A possède p racines distinctes.**

Notons ces racines $\lambda_1, \dots, \lambda_p$. La matrice A est diagonalisable, et en notant U_1, \dots, U_p les matrices des projecteurs spectraux associés on obtient $A^n = \sum_{k=1}^p \lambda_k^n U_k$ puis $X_n = A^n X_0 = \sum_{k=1}^p \lambda_k^n U_k X_0$.

En notant $\alpha_1, \dots, \alpha_p$ les premières composantes de chacun des vecteurs $U_1 X_0, \dots, U_p X_0$ nous avons prouvé l'existence de constantes $\alpha_1, \dots, \alpha_p$ telles que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = \alpha_1 \lambda_1^n + \dots + \alpha_p \lambda_p^n$.

Comme pour la dimension 2, ces constantes se déterminent à partir des conditions initiales u_0, \dots, u_{p-1} .

• **Dans les autres cas.**

La poursuite de cette étude nécessiterait de connaître la réduction de Jordan de la matrice A en fonction des multiplicités des racines du polynôme caractéristique. Nous nous en tiendrons donc là.

4. Exercices

Éléments propres

Exercice 11 Soit E l'espace vectoriel des suites réelles, et $f : E \rightarrow E$ l'application qui transforme une suite (u_n) en (v_n) définie par : $v_0 = u_0$ et $\forall n \in \mathbb{N}^*, v_n = \frac{u_n + u_{n-1}}{2}$. Déterminer les éléments propres de f (valeurs et vecteurs propres).

Exercice 12 Soit $a \in \mathbb{R}$ fixé. Déterminer les éléments propres de l'endomorphisme u de $\mathbb{R}[X]$ défini par : $u(P) = (X - a)P' + P$.

Exercice 13 Soit $\phi : \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \rightarrow \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ l'endomorphisme définie par $\phi(M) = M^T$. Déterminer les éléments propres (valeurs et sous-espaces propres) de ϕ .

Exercice 14 Soit E un \mathbb{R} -espace vectoriel de dimension finie, et $u \in \mathcal{L}(E)$ tel que $u^2 = -\text{Id}_E$.

a) Donner un exemple d'un tel endomorphisme en dimension 2 (par exemple en trouvant une matrice 2×2 vérifiant $A^2 = -I$).

b) Montrer que u n'a pas de valeurs propres réelles, et en déduire que la dimension de E est paire.

c) Montrer que pour tout $x \in E \setminus \{0_E\}$, $\text{Vect}(x, u(x))$ est un plan vectoriel stable par u .

d) En déduire que si $\dim E = 2n$, il existe des vecteurs (e_1, \dots, e_n) tels que $(e_1, u(e_1), e_2, u(e_2), \dots, e_n, u(e_n))$ soit une base de E . Quelle est la matrice de u dans cette base ?

Exercice 15 On appelle *matrice stochastique* une matrice $A = (a_{ij}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que

– pour tout $(i, j) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2$, $a_{ij} \in [0, 1]$;

– pour tout $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$, $\sum_{j=1}^n a_{ij} = 1$.

a) Montrer que 1 est valeur propre de A .

b) Soit λ une valeur propre de A . Montrer que $|\lambda| \leq 1$.

Polynôme caractéristique

Exercice 16 Soient A et B deux matrices de $\mathcal{M}_p(\mathbb{K})$. On désire prouver que les matrices AB et BA ont même polynôme caractéristique.

a) Montrer ce résultat lorsque A est inversible.

b) Lorsque A n'est pas inversible, justifier que pour $n \in \mathbb{N}^*$ assez grand la matrice $A + \frac{1}{n}I_p$ est inversible, et conclure.

Exercice 17 Pour $n \in \mathbb{N}^*$ on considère la matrice $A_n = (a_{ij}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ définie par $a_{ij} = \begin{cases} i & \text{si } i = j \\ 1 & \text{sinon} \end{cases}$.

a) Montrer que $\chi_{A_{n+1}}(X) = (X - n)\chi_{A_n}(X) - X(X - 1)\cdots(X - n + 1)$.

b) Prouver que pour tout $n \geq 1$ et $k \in \llbracket 0, n - 1 \rrbracket$, $(-1)^{n+k}\chi_{A_n}(k) > 0$.

c) En déduire que chaque intervalle $]0, 1[$, $]1, 2[$, \dots , $]n - 1, +\infty[$ contient exactement une valeur propre de A_n .

Exercice 18 Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, et $B = \left(\begin{array}{c|c} O & I_n \\ \hline A & O \end{array} \right) \in \mathcal{M}_{2n}(\mathbb{C})$. Exprimer le polynôme caractéristique de B en fonction de celui de A . Si A est diagonalisable, en est-il de même de B ?

Diagonalisation

Exercice 19 Soit $n \geq 2$, $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice telle que $\text{tr}(A) \neq 0$, et f l'endomorphisme de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ défini par :

$$f(M) = (\text{tr } A)M - (\text{tr } M)A.$$

Déterminer les éléments propres de f . f est-il diagonalisable ? Et lorsque $\text{tr } A = 0$?

Exercice 20 On considère deux réels *distincts* α et β tels que $u^2 - (\alpha + \beta)u + \alpha\beta\text{Id} = 0$. Montrer que $E = \text{Ker}(u - \alpha\text{Id}) \oplus \text{Ker}(u - \beta\text{Id})$, et en déduire que u est diagonalisable.

Exercice 21 On considère la matrice $A = \left(\begin{array}{c|c} O & -I_n \\ \hline I_n & O \end{array} \right) \in \mathcal{M}_{2n}(\mathbb{K})$.

Calculer A^2 . La matrice A est-elle diagonalisable lorsque $\mathbb{K} = \mathbb{R}$? et lorsque $\mathbb{K} = \mathbb{C}$?

Exercice 22 Soit $m \in \mathbb{R}$ et $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \\ 2-m & m-2 & m \end{pmatrix}$.

Quelles sont les valeurs propres de A ? Pour quelles valeurs de m la matrice A est-elle diagonalisable? Calculer A^n pour $n \in \mathbb{N}$ lorsque $m = 2$.

Exercice 23

a) Soit $u \in \mathcal{L}(E)$ un endomorphisme de rang 1. Montrer qu'il existe une base dans laquelle la matrice associée à u prend la forme suivante :

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}$$

et en déduire que u est diagonalisable si et seulement si $\text{tr } u \neq 0$.

b) Soient u_1, \dots, u_n des réels non nuls, et $A = \left(\frac{u_i}{u_j} \right)_{1 \leq i, j \leq n} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Déterminer les éléments propres de A .

Projecteurs spectraux

Exercice 24 Soit $A = \begin{pmatrix} 5 & 3 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

- Diagonaliser la matrice A en précisant la matrice de passage P .
- Soit $M \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ telle que $M^2 + M = A$. Justifier que la matrice $P^{-1}MP$ est diagonale.
- En déduire les solutions de l'équation $M^2 + M = A$.

Exercice 25 Soit $A \in \mathcal{M}_p(\mathbb{K})$ une matrice diagonalisable, de valeurs propres -1 et 2 . Exprimer A^n en fonction de A et I_p .

Soit $A \in \mathcal{M}_3(\mathbb{K})$ de valeurs propres $0, 1$ et 2 . Exprimer A^n en fonction de I, A et A^2 .

Commutant d'un endomorphisme

Exercice 26 Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$. Résoudre dans $\mathcal{M}_4(\mathbb{R})$ l'équation $M^2 = A$.

Trigonalisation

Exercice 27 Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$. Déterminer une matrice inversible P telle que $P^{-1}AP = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & \mu \end{pmatrix}$, où λ

et μ sont des valeurs à déterminer.

En déduire l'expression de A^n en fonction de n .

Exercice 28 Soient u et v deux endomorphismes d'un \mathbb{C} espaces vectoriel E de dimension finie vérifiant $u \circ v = v \circ u$. Montrer que u et v possèdent un vecteur propre en commun, et en déduire l'existence d'une base (e) sur laquelle $\text{Mat}_{(e)}(u)$ et $\text{Mat}_{(e)}(v)$ sont toutes deux triangulaires supérieures (on pourra raisonner par récurrence sur $\dim E$ pour prouver le second point).

Exercice 29 Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. Déterminer les polynômes P tels que la matrice $P(A)$ soit nilpotente.

Suites récurrentes linéaires

Exercice 30 On considère la suite u définie par les données initiales $u_0 = 1 + \cos \theta$, $u_1 = -1$, $u_2 = 4 + \cos \theta$ avec $\theta \in]0, \pi[$, et la relation de récurrence : $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+3} + 2(1 - \cos \theta)u_{n+2} + (1 - 4\cos \theta)u_{n+1} + 2u_n = 0$. Exprimer u_n en fonction de n .

Exercice 31 On considère deux urnes A et B, chacune contenant initialement deux jetons : l'un portant la valeur 0 et l'autre la valeur 1. On effectue successivement des échanges qui consistent à échanger un jeton pris au hasard dans l'urne A avec un jeton pris au hasard dans l'urne B. On note Z_n la variable aléatoire égale à la somme des valeurs des jetons contenus dans l'urne A après avoir effectué n échanges. On contiendra que Z_0 est égale à 1. Pour un entier $n \in \mathbb{N}$, on note $a_n = P(Z_n = 0)$, $b_n = P(Z_n = 1)$ et $c_n = P(Z_n = 2)$.

- a) Établir une relation matricielle liant les vecteurs $X_n = \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \\ c_n \end{pmatrix}$ et $X_{n+1} = \begin{pmatrix} a_{n+1} \\ b_{n+1} \\ c_{n+1} \end{pmatrix}$.
- b) Déterminer la limite des suites (a_n) , (b_n) et (c_n) , puis la limite de la suite $E(Z_n)$.