

Fonctions vectorielles

Jusqu'à présent, nous avons toujours considéré des fonctions *numériques*, c'est-à-dire à valeurs dans \mathbb{R} ou \mathbb{C} ; nous allons maintenant généraliser les notions de continuité et de dérivabilité au cas des fonctions *vectorielles*, autrement dit à valeurs dans un espace vectoriel. Aussi, dans tout ce chapitre I désignera un intervalle réel, E un espace vectoriel de dimension finie muni d'une norme, et nous nous intéresserons aux fonction $f : I \rightarrow E$.

On pourra noter que cette notion est en particulier utilisée en cinématique, où position, vitesse et accélération sont des fonctions vectorielles du temps.

1. Continuité et dérivabilité des fonctions vectorielles

1.1 Étude locale d'une application

DÉFINITION. — Soit I un intervalle de \mathbb{R} , a un point ou une extrémité de I , et $f : I \rightarrow E$ une fonction vectorielle. On dit que $f(t)$ admet le vecteur $\ell \in E$ pour limite lorsque t tend vers a lorsque :

$$\forall \epsilon > 0, \exists \eta > 0 \mid \forall t \in I, |t - a| \leq \eta \Rightarrow \|f(t) - \ell\| \leq \epsilon.$$

THÉORÈME 1.1 (caractérisation séquentielle) — $f(t)$ admet ℓ pour limite lorsque t tend vers a si et seulement si pour toute suite (t_n) d'éléments de I qui converge vers a , la suite $(f(t_n))$ converge vers ℓ .

Nous avons admis qu'en dimension finie, la notion de convergence d'une suite est indépendante du choix de la norme, aussi ce résultat conduit au corollaire suivant :

COROLLAIRE — La notion de limite d'une fonction vectorielle ne dépend pas du choix de la norme utilisée pour mesurer la distance entre $f(t)$ et ℓ .

PROPOSITION 1.2 — Si f admet ℓ pour limite en a , la fonction $\|f\|$ admet le réel $\|\ell\|$ pour limite en a .

LEMME — Si $u \in \mathcal{L}(E, F)$ est une application linéaire, il existe une constante $B > 0$ telle que pour tout $x \in E$, $\|u(x)\| \leq B\|x\|$.

PROPOSITION 1.3 — Si $u \in \mathcal{L}(E, F)$ est une application linéaire et si $f : I \rightarrow E$ admet une limite ℓ en a , la fonction $u \circ f$ admet le vecteur $u(\ell)$ pour limite en a .

Remarque. Les autres théorèmes généraux concernant les limites (combinaisons linéaires de limites en particulier) se prolongent sans difficulté particulière.

• Fonctions coordonnées

Considérons une base (e_1, \dots, e_p) de E . Pour tout $t \in I$, le vecteur $f(t)$ peut être décomposé dans cette base :

$f(t) = \sum_{k=1}^p f_k(t)e_k$. Les fonctions f_1, \dots, f_p ainsi définies sont des fonctions à valeurs numériques, appelées les *fonctions coordonnées* de f .

PROPOSITION 1.4 — f admet une limite ℓ en a si et seulement si chacune des fonctions f_k admet une limite ℓ_k en a , et dans ce cas : $\ell = \ell_1 e_1 + \dots + \ell_p e_p$.

Remarque. Ce dernier résultat montre que calculer la limite d'une fonction vectorielle revient à décomposer cette fonction dans une base puis à calculer la limite de chacune de ses composantes. Par exemple, si $f : I \rightarrow \mathbb{R}^3$ se décompose sous la forme : $f(t) = (x(t), y(t), z(t))$, dire que la fonction vectorielle f admet une limite en a revient à dire que chacune des trois fonctions numériques x , y et z admet une limite en a .

■ Relations de comparaison

Soit $f : I \rightarrow E$ une fonction vectorielle, a un point ou une extrémité de I , et $\phi : I \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction à valeurs réelles ne s'annulant pas ailleurs qu'en a .

On dit que f est *dominée* par ϕ au voisinage de a lorsque f/ϕ est bornée au voisinage de a , et que f est *négligeable* devant ϕ au voisinage de a lorsque $\lim_{t \rightarrow a} f(t)/\phi(t) = 0_E$. Dans le premier cas, on note : $f(t) \underset{a}{=} O(\phi(t))$ et dans le deuxième : $f(t) \underset{a}{=} o(\phi(t))$.

Exemples. La relation : $f(t) \underset{a}{=} O(1)$ exprime le fait que la fonction f est bornée au voisinage de a .

La relation $f(t) \underset{a}{=} o(1)$ exprime le fait que la fonction f tend vers le vecteur nul lorsque t tend vers a .

■ Continuité

DÉFINITION. — Une fonction vectorielle $f : I \rightarrow E$ est dite continue en $a \in I$ lorsque $f(t)$ tend vers $f(a)$ lorsque t tend vers a . f est dite continue sur I lorsqu'elle est continue en tout point de I .

La continuité d'une fonction vectorielle en a se traduit donc par la relation :

$$\forall \epsilon > 0, \exists \eta > 0 \mid \forall t \in I, |t - a| \leq \eta \Rightarrow \|f(t) - f(a)\| \leq \epsilon.$$

ou bien encore par la *caractérisation séquentielle* :

pour toute suite (t_n) qui converge vers a la suite $(f(t_n))$ converge vers $f(a)$.

ou enfin en utilisant les fonctions coordonnées :

PROPOSITION 1.5 — Si (e_1, \dots, e_p) est une base de E et f_1, f_2, \dots, f_p les fonctions coordonnées de f dans cette base, alors f est continue en a si et seulement si chacune des fonctions à valeurs numériques f_1, \dots, f_p est continue en a .

Exemple. La fonction $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ définie par : $\forall t \in \mathbb{R}, f(t) = \begin{pmatrix} \cos t & -\sin t \\ \sin t & \cos t \end{pmatrix}$ est continue sur \mathbb{R} puisque chacune de ses quatre fonctions composantes l'est.

PROPOSITION 1.6 — Si $f : I \rightarrow E$ est une fonction continue sur I et $u \in \mathcal{L}(E, F)$ est une application linéaire, la fonction $u \circ f : I \rightarrow F$ est continue sur I .

Exercice 1. On considère deux réels $(p, q) \in \mathbb{R}^* \times \mathbb{R}$ ainsi que la droite \mathcal{D} d'équation $y = px + q$ et les deux demi-plans $\mathcal{P}_1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y < px + q\}$ et $\mathcal{P}_2 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y > px + q\}$.

Soit $f :]a, b[\rightarrow \mathbb{R}^2$ une fonction vectorielle continue telle que $f(a) \in \mathcal{P}_1$ et $f(b) \in \mathcal{P}_2$. Montrer qu'il existe $c \in]a, b[$ tel que $f(c) \in \mathcal{D}$.

1.2 Dérivation des fonctions à valeurs vectorielles

DÉFINITION. — On dit qu'une fonction vectorielle $f : I \rightarrow E$ admet une dérivée en $t_0 \in I$ lorsqu'il existe un vecteur $\ell \in E$ tel que : $\ell = \lim_{t \rightarrow t_0} \frac{f(t) - f(t_0)}{t - t_0}$. On pose alors $f'(t_0) = \ell$.

On a bien entendu de manière équivalente : $f'(t_0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(t_0 + h) - f(t_0)}{h}$.

Les notations de Landau permettent enfin d'exprimer cette définition de la manière suivante : f admet ℓ pour dérivée en $t_0 \in I$ lorsque : $f(t) \underset{t_0}{=} f(t_0) + (t - t_0)f'(t_0) + o(t - t_0)$.

PROPOSITION 1.7 — Si f est dérivable en t_0 , alors f est continue en t_0 .

Tout comme la continuité, le recours aux fonctions composantes permet de ramener la dérivation d'une fonction vectorielle à la dérivation des fonctions à valeurs numériques :

PROPOSITION 1.8 — Soit (e_1, \dots, e_p) une base de E , et f_1, \dots, f_p les fonctions coordonnées de f dans cette base. Alors f est dérivable en t_0 si et seulement si les fonctions f_1, \dots, f_p le sont, et dans ce cas :

$$f'(t_0) = f'_1(t_0)e_1 + \dots + f'_p(t_0)e_p.$$

Exemples.

- Une fonction à valeurs complexes $f : I \rightarrow \mathbb{C}$ est dérivable en t_0 si et seulement si les fonctions $\Re f$ et $\Im f$ le sont.
- En cinématique, on obtient les composantes dans une base quelconque du vecteur accélération en dérivant les composantes du vecteur vitesse¹.

PROPOSITION 1.9 — Soit $f : I \rightarrow E$ une fonction dérivable en t_0 , et $u \in \mathcal{L}(E, F)$ une application linéaire. Alors $u(f)$ est dérivable en t_0 , et $u(f)'(t_0) = u(f'(t_0))$.

De manière analogue, en admettant que la proposition 1.3 se généralise aux fonctions bilinéaires (ce qui n'est pas difficile à prouver), on peut démontrer le résultat suivant :

PROPOSITION 1.10 — Soient $f : I \rightarrow E$ et $g : I \rightarrow F$ deux applications vectorielles dérivables en t_0 , et $B : E \times F \rightarrow G$ une application bilinéaire. Alors $B(f, g)$ est dérivable en t_0 , et :

$$B(f, g)'(t_0) = B(f'(t_0), g(t_0)) + B(f(t_0), g'(t_0))$$

Exemple. Cette formule généralise bien entendu la formule de dérivation d'un produit fg de deux fonctions à valeurs numériques, mais s'utilise aussi pour dériver une expression faisant intervenir un produit scalaire :

lorsque B est un produit scalaire, on a : $\langle f | g \rangle'(t_0) = \langle f'(t_0) | g(t_0) \rangle + \langle f(t_0) | g'(t_0) \rangle$.

Exercice 2. Soit E un espace euclidien et $f : I \rightarrow E$ une fonction vectorielle dérivable en tout point de I , et telle que $\forall t \in I, \|f(t)\| = 1$. Montrer que pour tout $t \in I$, les vecteurs $f(t)$ et $f'(t)$ sont orthogonaux.

Remarque. On peut encore généraliser cette formule au cas d'une application n -linéaire, ce qui est le cas en particulier du déterminant. Ainsi, si f_1, \dots, f_p sont des fonctions définies de I dans E et dérivables en t_0 et (e) une base de E , l'application $\phi : t \mapsto \det_e(f_1(t), \dots, f_p(t))$ est dérivable en t_0 , et :

$$\phi'(t_0) = \sum_{k=1}^p \det_e(f_1(t_0), \dots, f_{k-1}(t_0), f'_k(t_0), f_{k+1}(t_0), \dots, f_p(t_0)).$$

Exercice 3. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice, et $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ la fonction définie par $f(t) = \det(I_n + tA)$. Justifier que f est dérivable en 0, et calculer $f'(0)$.

Enfin, concernant la composée, nous avons :

PROPOSITION 1.11 — Soit I et J deux intervalles, $t_0 \in I$, $\phi : I \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction dérivable en t_0 tel que $\phi(I) \subset J$, et $f : J \rightarrow E$ une fonction vectorielle dérivable en $\phi(t_0)$. Alors $f \circ \phi$ est dérivable en t_0 , et :

$$(f \circ \phi)'(t_0) = \phi'(t_0) \times f'(\phi(t_0)).$$

■ Fonction dérivée

DÉFINITION. — Lorsque f est dérivable en tout point de I , on définit une fonction $f' : I \rightarrow E$, appelée fonction dérivée de f . Si f' est à son tour dérivable, on note f'' (ou $f^{(2)}$) sa dérivée, et plus généralement : on note $f^{(0)} = f$, et si $f^{(n)}$ est dérivable, on note $f^{(n+1)}$ sa dérivée.

1. Il faut bien entendu que la base ne soit pas mobile, c'est-à-dire que les vecteurs qui la composent soient constants. L'exercice 13 traite le cas d'une base mobile.

On pourra aussi noter $D(f)$ ou $\frac{df}{dt}$ en lieu et en place de f' , et $D^k(f)$ ou $\frac{d^k f}{dt^k}$ pour $f^{(k)}$.

Pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$, on note $\mathcal{C}^n(I, E)$ l'ensemble des fonctions f n fois dérivables sur I , telles que $f^{(n)}$ soit continue. Pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, on a : $\mathcal{C}^{n+1}(I, E) \subset \mathcal{C}^n(I, E)$. On pose $\mathcal{C}^\infty(I, E) = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} \mathcal{C}^n(I, E)$.

THÉORÈME 1.12 — Si f et g sont des fonctions vectorielles de classe \mathcal{C}^n sur I et B une forme bilinéaire, $B(f, g)$ est aussi de classe \mathcal{C}^n , et :

$$B(f, g)^{(n)} = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} B(f^{(k)}, g^{(n-k)}).$$

PROPOSITION 1.13 — Soit I et J deux intervalles, $\phi : I \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction numérique de classe \mathcal{C}^n telle que $\phi(I) \subset J$, et $f : J \rightarrow E$ une fonction vectorielle de classe \mathcal{C}^n . Alors la fonction vectorielle $f \circ \phi : I \rightarrow E$ est aussi de classe \mathcal{C}^n .

2. Arcs paramétrés

En géométrie, le concept assez vague de courbe désigne certains sous-ensembles du plan ou de l'espace usuels. C'est pour donner corps à ce concept qu'on introduit la notion plus précise d'*arc paramétré*, qui s'inspire de la cinématique. D'autres approches possibles de la notion de courbe, notamment les définitions implicites des *lignes de niveau*, seront évoquées dans le chapitre dédié au calcul différentiel.

On appelle *arc paramétré plan* de classe \mathcal{C}^n un couple (I, f) , où I est un intervalle et $f : I \rightarrow \mathbb{R}^2$ une fonction vectorielle de classe \mathcal{C}^n .

Remarque. Une fois \mathbb{R}^2 muni de sa structure affine naturelle, on note $M(t)$ le point défini par la relation : $\overrightarrow{OM}(t) = f(t)$. On peut alors donner une interprétation cinématique de cet arc paramétré en le voyant comme la *trajectoire* du point $M(t)$ au cours du temps.

Le vecteur *vitesse* sera alors noté $f'(t)$, ou encore $\frac{dM}{dt}$, et le vecteur *accélération*, $f''(t)$ ou $\frac{d^2M}{dt^2}$.

Exercice 4. Soit (I, f) un arc paramétré régulier de classe \mathcal{C}^1 ne passant pas par l'origine, et tel que pour tout $t \in I$, la famille $(f(t), f'(t))$ soit liée. Pour tout $t \in I$, on pose $g(t) = \frac{f(t)}{\|f(t)\|}$. Montrer que g est de classe \mathcal{C}^1 sur I , et que pour tout $t \in I$, $g'(t)$ est à la fois orthogonal et colinéaire à $g(t)$.
En déduire que la trajectoire est rectiligne.

On note (\vec{e}_1, \vec{e}_2) la base canonique de \mathbb{R}^2 , et on pose pour tout $t \in I$: $f(t) = x(t)\vec{e}_1 + y(t)\vec{e}_2$.

Remarque. Le graphe d'une fonction numérique d'équation $y = \phi(x)$ est un cas particulier correspondant à la représentation paramétrique $f(t) = t\vec{e}_1 + \phi(t)\vec{e}_2$.

2.1 Tangente en un point régulier

On appelle *point régulier* un point $M(t_0)$ de la courbe pour lequel la vitesse $f'(t_0)$ ne s'annule pas. La définition de la dérivée nous indique alors qu'au voisinage de t_0 ,

$$f(t) \underset{t_0}{=} f(t_0) + (t - t_0)f'(t_0) + o(t - t_0).$$

Autrement dit, en première approximation l'arc paramétré peut être localement confondu avec l'arc de paramétrisation $t \mapsto f(t_0) + (t - t_0)f'(t_0)$, qui n'est autre que la droite passant par le point $M(t_0)$ et dirigée par le vecteur $f'(t_0)$; cette droite est appelée la *tangente* à la courbe au point $M(t_0)$.

Remarque. Dans le cas d'une courbe d'équation $y = \phi(x)$, nous avons $f'(t) = \vec{e}_1 + \phi'(t)\vec{e}_2 \neq \vec{0}$, donc tous les points sont réguliers, et la tangente en $M(t)$ a pour pente $\phi'(t)$.

Exemple. La détermination des tangentes aux points remarquables d'une courbe est indispensable au tracé de celle-ci. Illustrons ceci par l'exemple suivant : $\begin{cases} x(t) = 2 \cos(t) \\ y(t) = \sin(3t) \end{cases}$, avec $t \in \mathbb{R}$.

- les fonctions x et y sont 2π -périodiques, donc la trajectoire est périodique ; on peut se contenter d'étudier celle-ci sur l'intervalle $[-\pi, \pi]$.
- x est paire et y impaire, donc la trajectoire présente une symétrie par rapport à l'axe Ox ; on peut donc restreindre le domaine d'étude à l'intervalle $[0, \pi]$.
- Enfin, on a $\forall t \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, $\begin{cases} x(\pi - t) = -x(t) \\ y(\pi - t) = y(t) \end{cases}$, donc la trajectoire présente aussi une symétrie par rapport à l'axe Oy ; on peut donc encore restreindre le domaine d'étude à l'intervalle $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$.

Sachant que $\forall t \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, $\begin{cases} x'(t) = -2 \sin(t) \\ y'(t) = 3 \cos(3t) \end{cases}$, les variations de x et y sont données par le tableau suivant :

t	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{2}$
$x'(t)$	0	-	-
$x(t)$	2	$\sqrt{3}$	0
$y(t)$	0	1	-1
$y'(t)$		+	-
		0	0

Placer les points remarquables ainsi que les tangentes en ces points est en général suffisant pour obtenir une approximation de la trajectoire, en suivant les variations indiquées par le tableau des variations de x et y .

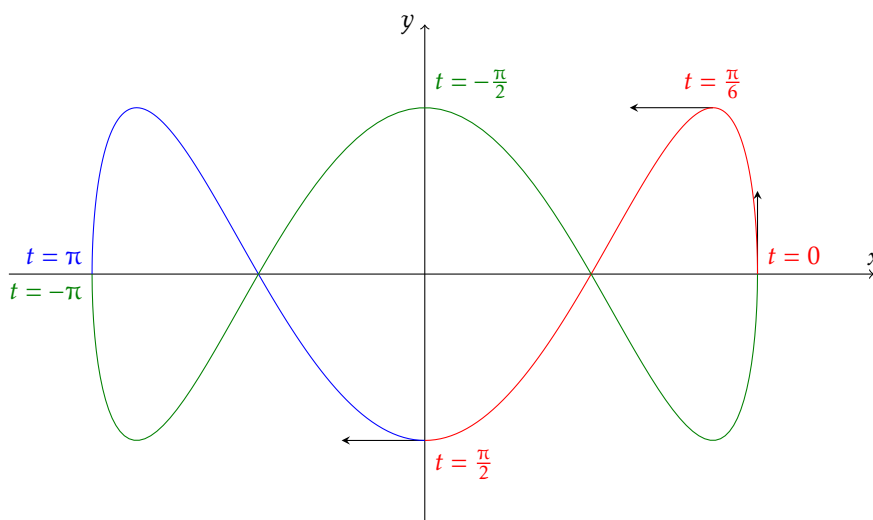


FIGURE 1 – Le domaine étudié est tracé en rouge ; les symétries obtenues prolongent le tracé sur $[0, \pi]$ (en bleu) puis sur $[-\pi, \pi]$ (en vert).

Pour un tracé plus précis on utilise la bibliothèque `matplotlib.pyplot` et le script suivant :

```

import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt

T = np.linspace(0, 2*np.pi, 256)
X = [2*np.cos(t) for t in T]
Y = [np.sin(3*t) for t in T]

plt.plot(X, Y)
plt.grid()
plt.axis('equal') # pour obtenir un repère orthonormé

```

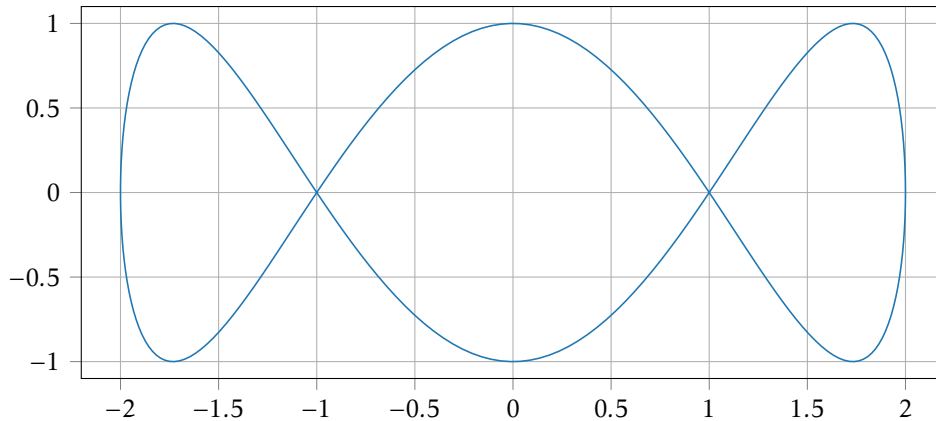


FIGURE 2 – Le tracé obtenu à l'aide de `matplotlib.pyplot`.

Exercice 5. Étudier puis tracer l'arc paramétré d'équations $\begin{cases} x(t) = \cos(3t) \\ y(t) = \sin(2t) \end{cases}$.

2.2 Étude locale au voisinage d'un point

Un point qui n'est pas régulier est dit *singulier*; en cinématique on parlera plutôt de point *stationnaire*, ou encore de point d'*arrêt* : un point où la vitesse s'annule.

Considérons un tel point $M(t_0)$. Le vecteur dérivé $f'(t_0)$ étant nul, il n'est pas possible de définir la tangente en $M(t_0)$ et par là même de connaître l'allure locale en ce point. Pour pallier à ce problème, nous allons suivre la même logique qui a présidé à la définition de la tangente en renforçant nos hypothèses : nous allons supposer que f possède au voisinage de t_0 un développement limité de la forme :

$$f(t) = f(t_0) + (t - t_0)^p \vec{u} + o((t - t_0)^p) \quad \text{avec } p \geq 2 \text{ et } \vec{u} \neq \vec{0}.$$

Ainsi, l'arc paramétré peut être localement confondu avec l'arc de paramétrisation $t \mapsto f(t_0) + (t - t_0)^p \vec{u}$, qui est :

- la droite passant par $M(t_0)$ et dirigée par \vec{u} lorsque p est *impair*;
- la demi-droite issue de $M(t_0)$ et dirigée par \vec{u} lorsque p est *pair*.

Exemple. On considère l'arc paramétré par : $\begin{cases} x(t) = \cos(t)^3 \\ y(t) = \sin(t)^3 \end{cases}, t \in \mathbb{R}.$

Commençons par en déterminer les symétries.

- x et y sont 2π -périodiques, donc on peut restreindre l'intervalle d'étude à $[-\pi, \pi]$.
- x est paire et y impaire, donc la trajectoire est symétrique par rapport à Ox . On peut donc restreindre l'intervalle d'étude à $[0, \pi]$.
- Pour tout $t \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, $\begin{cases} x(\pi - t) = -x(t) \\ y(\pi - t) = y(t) \end{cases}$, donc Oy est aussi axe de symétrie de la trajectoire; on peut donc restreindre l'intervalle d'étude à $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$.

L'intervalle d'étude sera donc $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$. Sur cet intervalle, $\begin{cases} x'(t) = -3 \sin(t) \cos(t)^2 \\ y'(t) = 3 \cos(t) \sin(t)^2 \end{cases}$, ce qui conduit aux variations suivantes :

t	0		$\frac{\pi}{2}$
$x'(t)$	0	-	0
$x(t)$	1	→	
$y(t)$	0	→	
$y'(t)$	0	+	0

Sachant que $f'(0) = \vec{0}$ et $f'(\pi/2) = \vec{0}$, le tableau de variation s'avère insuffisant pour déterminer l'allure locale du support au voisinage de $t = 0$ et de $t = \pi/2$, qui correspondent à deux points singuliers.

Au voisinage de $t_0 = 0$, $\begin{cases} x(t) = \left(1 - \frac{t^2}{2} + o(t^2)\right)^3 = 1 - \frac{3}{2}t^2 + o(t^2) \\ y(t) = (t + o(t))^3 = t^3 + o(t^3) = o(t^2) \end{cases}$ donc $f(t) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} - \frac{3t^2}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + o(t^2)$.

Le vecteur $-\vec{e}_1$ dirige la demi-droite qui approche localement la trajectoire au voisinage de $t_0 = 0$.

Au voisinage de $t_0 = \pi/2$ on pose $t = \pi/2 - s$. Mais alors $x(t) = y(s)$ et $y(t) = x(s)$ donc d'après le calcul précédent on peut affirmer que $f(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} - \frac{3s^2}{2} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} + o(t^2)$.

Le vecteur $-\vec{e}_2$ dirige la demi-droite qui approche localement la trajectoire au voisinage de $t_0 = \pi/2$.

Nous sommes maintenant en mesure de tracer le support de cet arc paramétré (qui s'appelle une *astroïde*), sur $[0, \pi/2]$ d'abord puis sur $[-\pi, \pi]$ en utilisant les symétries.

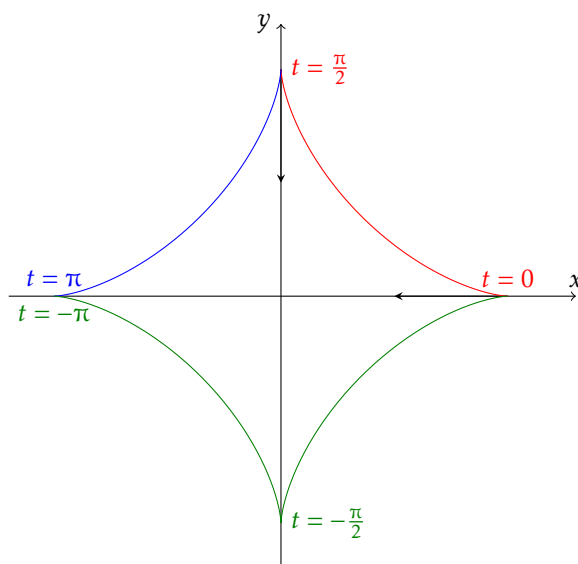


FIGURE 3 – Le tracé de l'astroïde.

Remarque. Le tracé montre que nous avons oublié une symétrie vis-à-vis de chacune des deux bissectrices.

En effet, nous avons pour tout $t \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, $\begin{cases} x(\pi/2 - t) = y(t) \\ y(\pi/2 - t) = x(t) \end{cases}$, ce qui montre que la première bissectrice est axe de symétrie de la trajectoire. Nous aurions donc pu restreindre notre étude à l'intervalle $\left[0, \frac{\pi}{4}\right]$.

Remarque. Utilisons maintenant Python pour tracer la trajectoire au voisinage de $t_0 = 0$, mais sans relier les points calculés :

```

T = np.linspace(-np.pi/4, np.pi/4, 64)
X = [np.cos(t)**3 for t in T]
Y = [np.sin(t)**3 for t in T]

plt.plot(X, Y, '.')
```

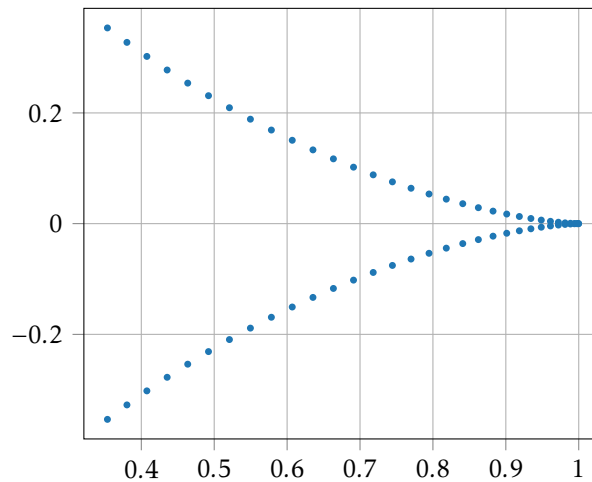


FIGURE 4 – La trajectoire au voisinage du point d'arrêt $t_0 = 0$.

Dans une interprétation cinématique de la trajectoire, les points tracés sont régulièrement espacés dans le temps. L'accumulation que l'on peut observer au voisinage de $t_0 = 0$ correspond donc à un ralentissement jusqu'à aboutir à une vitesse nulle à la date $t_0 = 0$ (un point d'arrêt), puis à une accélération quand le point mobile s'en éloigne.

Exercice 6. On note $A(t)$ et $B(t)$ les points d'intersection des axes (Ox) et (Oy) avec la tangente en $M(t)$ de l'astroïde. Calculer la distance $A(t)B(t)$.

3. Exercices

Continuité des fonctions vectorielles

Exercice 7 Peut-on trouver une fonction continue $f : [-1, 1] \rightarrow \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ vérifiant $f(-1) = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ et $f(1) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$? Peut-on imposer en plus d'avoir : $\forall t \in [-1, 1], f(t) \in \mathcal{GL}_2(\mathbb{R})$?

Dérivation des fonctions vectorielles

Exercice 8 On considère une fonction vectorielle $f : \mathbb{R} \rightarrow E$ supposée dérivable sur \mathbb{R} .

- Que peut-on dire de f' si f est paire? impaire? périodique?
- Que peut-on dire de f si f' est paire? impaire? périodique?

Exercice 9 Théorème de Rolle généralisé

a) Soit $f : [a, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$ une fonction à valeurs réelles continue sur $[a, +\infty[$ et dérivable sur $]a, +\infty[$, telle que $\lim_{t \rightarrow +\infty} f(t) = f(a)$. Montrer qu'il existe $c \in]a, +\infty[$ tel que $f'(c) = 0$.

b) Montrer que le théorème de Rolle ne se généralise pas au cas d'une fonction à valeurs vectorielles, en donnant un exemple de fonction vectorielle $f : [a, b] \rightarrow E$ continue sur $[a, b]$ et dérivable sur $]a, b[$ telle que $f(a) = f(b)$ et pour tout $c \in]a, b[$, $f'(c) \neq 0_E$.

Exercice 10 Soit I un intervalle, et $f : I \rightarrow \mathbb{C}$ une fonction de classe \mathcal{C}^1 ne s'annulant pas.

Montrer que la fonction $|f|$ est croissante si et seulement si : $\forall t \in I, \Re\left(\frac{f'(t)}{f(t)}\right) \geq 0$.

Exercice 11 On considère une fonction vectorielle $A : I \rightarrow \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ de classe \mathcal{C}^1 , telle que pour tout $t \in I$, la matrice $A(t)$ soit inversible. On peut donc définir la fonction $f : I \rightarrow \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ en posant : $\forall t \in I, f(t) = A(t)^{-1}$. Justifier que f est de classe \mathcal{C}^1 , et calculer $f'(t)$ pour $t \in I$.

Exercice 12 Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on considère le déterminant :

$$D_n(x) = \begin{vmatrix} x & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \frac{x^2}{2!} & x & 1 & \ddots & \vdots \\ \frac{x^3}{3!} & \frac{x^2}{2!} & x & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 1 \\ \frac{x^n}{n!} & \cdots & \frac{x^3}{3!} & \frac{x^2}{2!} & x \end{vmatrix}$$

Justifier que D_n est une fonction dérivable et calculer $D'_n(x)$. En déduire l'expression de $D_n(x)$.

Exercice 13 On considère un espace euclidien orienté E de dimension 3, et trois fonctions vectorielles $e_1, e_2, e_3 : I \rightarrow E$ de classe \mathcal{C}^1 telle que pour tout $t \in I, e(t) = (e_1(t), e_2(t), e_3(t))$ soit une base orthonormée (*mobile*). Pour tout $t \in I$, on note $M(t) = \text{Mat}_{e(t)}(e'_1(t), e'_2(t), e'_3(t))$. Montrer que cette matrice est antisymétrique, et en déduire l'existence d'un vecteur $\omega(t)$ tel que pour tout $i \in \{1, 2, 3\}, e'_i(t) = \omega(t) \wedge e_i(t)$ ($\omega(t)$ est le vecteur de rotation instantanée).

On considère une fonction vectorielle $f : I \rightarrow E$ définie par la donnée de trois fonctions numériques $f_i : I \rightarrow \mathbb{R}$ de classe \mathcal{C}^1 ($i \in \{1, 2, 3\}$), composantes de f dans la base $(e) : \forall t \in I, f(t) = f_1(t)e_1(t) + f_2(t)e_2(t) + f_3(t)e_3(t)$. Exprimer la dérivée de la fonction f à l'aide du vecteur de rotation instantanée.

Arcs paramétrés

Exercice 14 Soit $f : I \rightarrow \mathbb{R}^3$ un arc paramétré de classe \mathcal{C}^2 tel que pour tout $t \in I, f''(t)$ est colinéaire à $f(t)$ (mouvement à *accélération centrale*).

Pour tout $t \in I$, on pose $\sigma(t) = f(t) \wedge f'(t)$. Montrer que σ est une fonction vectorielle constante. En déduire que s'il existe $t_0 \in I$ tel que la famille $(f(t_0), f'(t_0))$ soit libre, la trajectoire est plane.

Exercice 15 Étudier puis tracer la *cycloïde*, d'équations $\begin{cases} x(t) = t - \sin(t) \\ y(t) = 1 - \cos(t) \end{cases}$.

Exercice 16 Tracer les trajectoires définies par les représentations paramétriques suivantes :

$$\begin{cases} x(t) = 2 \cos(2t) \\ y(t) = \sin(3t) \end{cases} \quad \begin{cases} x(t) = \cos(t) \cos(2t) \\ y(t) = \sin(t)(2 + \cos(2t)) \end{cases}$$

Exercice 17 Étudier l'arc paramétré défini par les équations : $\begin{cases} x(t) = t - \text{th}(t) \\ y(t) = \frac{1}{\text{ch}(t)} \end{cases}$ (*tractrice de Newton*).

On note $A(t)$ le point d'intersection de l'axe (Ox) avec la tangente au point $M(t)$ de la courbe. Déterminer la valeur de la distance $A(t)M(t)$, et préciser la nature du mouvement du point $A(t)$.

Exercice 18 Soit \mathcal{C} le cercle de centre le point de coordonnées $(1, 0)$ et de rayon 1, et \mathcal{D} la droite d'équation $x = 1$. À tout point M de \mathcal{C} , on note N son projeté orthogonal sur \mathcal{D} , et P le point de la droite (ON) pour lequel le triangle MNP est rectangle en M . Tracer le lieu des points P lorsque M décrit le cercle \mathcal{C} .

Exercice 19 On considère l'astroïde d'équation : $\begin{cases} x(t) = \cos(t)^3 \\ y(t) = \sin(t)^3 \end{cases}$.

Soit $P(t)$ le projeté orthogonal de O sur la normale à l'astroïde en $M(t)$. Déterminer le lieu de $P(t)$ lorsque t varie.

Exercice 20 On considère l'arc paramétré d'équations $\begin{cases} x(t) = \frac{\sin(t)}{1 + \cos(t)^2} \\ y(t) = \frac{\sin(t)\cos(t)}{1 + \cos(t)^2} \end{cases}$ pour $t \in \mathbb{R}$.

a) Justifier que l'étude de cet arc peut se restreindre à l'intervalle $[0, \pi/2]$, étudier les variations de x et de y sur cet intervalle, puis réaliser le tracé du support.

b) On considère les deux points F et F' de coordonnées respectives $(1/\sqrt{2}, 0)$ et $(-1/\sqrt{2}, 0)$. Montrer que pour tout point M du support, $MF \times MF' = 1/2$.