

## Espaces euclidiens

Le produit scalaire est un outil essentiel de la géométrie vectorielle; en donner une définition hors du cadre strict de la géométrie de dimension finie va nous permettre d'exploiter certaines des notions qui lui sont associées (l'orthogonalité notamment) dans le cadre élargi des espaces de dimensions quelconques, en particulier les espaces fonctionnels.

Un espace muni d'un produit scalaire sera dit *préhilbertien*<sup>1</sup>, le terme *euclidien* étant réservé aux espaces de dimensions finies.

## 1. Espaces préhilbertiens

### 1.1 Produit scalaire

Dans toute cette section,  $E$  désigne un  $\mathbb{R}$ -espace vectoriel de dimension quelconque.

**DÉFINITION.** — Un produit scalaire sur  $E$  est une forme bilinéaire  $\phi : E \times E \rightarrow \mathbb{R}$  vérifiant :

- $\forall (x, y) \in E^2$ ,  $\phi(x, y) = \phi(y, x)$  ( $\phi$  est symétrique);
- $\forall x \in E$ ,  $\phi(x, x) \geq 0$  ( $\phi$  est positive);
- $\forall x \in E$ ,  $\phi(x, x) = 0 \Rightarrow x = 0_E$  ( $\phi$  est définie).

Un produit scalaire est donc une forme bilinéaire symétrique définie positive<sup>2</sup>.

On notera par la suite les notations usuelles :  $\phi(x, y) = \langle x | y \rangle$ , et  $\|x\| = \sqrt{\langle x | x \rangle}$ , cette dernière expression désignant la *norme euclidienne* associée au produit scalaire<sup>3</sup>.

Un  $\mathbb{R}$ -espace vectoriel muni d'un produit scalaire est appelé un *espace préhilbertien réel*.

**Exemples.** Lorsque  $I$  est un intervalle,  $(f, g) \mapsto \int_I fg$  est un produit scalaire sur  $L_c^2(I, \mathbb{R})$ .

L'application  $(A, B) \mapsto \text{tr}(A^T B)$  est un produit scalaire sur  $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$ .

**Exercice 1.** On considère  $n + 1$  points deux à deux distincts  $(x_0, x_1, \dots, x_n)$ , et  $E = \mathbb{R}_n[X]$ . Montrer que l'application  $(P, Q) \mapsto \sum_{k=0}^n P(x_k)Q(x_k)$  définit un produit scalaire sur  $E$ .

#### • Utilisation de la bilinéarité

En utilisant la bilinéarité et la symétrie du produit scalaire, on obtient les deux développements suivants :

$$\begin{aligned} \forall (x, y) \in E^2, \quad \|x + y\|^2 &= \|x\|^2 + 2\langle x | y \rangle + \|y\|^2 \\ \|x - y\|^2 &= \|x\|^2 - 2\langle x | y \rangle + \|y\|^2 \end{aligned}$$

qui permettent d'en déduire les deux formules :

**égalité du parallélogramme** :  $\|x + y\|^2 + \|x - y\|^2 = 2(\|x\|^2 + \|y\|^2)$ ;

**identité de polarisation** :  $\langle x | y \rangle = \frac{1}{4}(\|x + y\|^2 - \|x - y\|^2)$ .

1. Comme ce terme le laisse entendre, il existe aussi des espaces *hilbertiens*, mais leur étude n'est pas au programme.

2. Ces différents termes proviennent de l'étude générale des formes bilinéaires.

3. Il s'agit en effet d'une norme au sens topologique du terme

La première présente l'intérêt de caractériser, parmi les normes, celles qui sont euclidiennes (c'est à dire issues d'un produit scalaire). La seconde permet de définir le produit scalaire à partir de la norme. En particulier, on remarquera qu'elle implique que toute norme euclidienne dérive d'un unique produit scalaire.

**Exercice 2.** Soient  $x$  et  $y$  deux vecteurs non nuls d'un espace préhilbertien réel  $E$ . Établir la relation :

$$\left\| \frac{x}{\|x\|^2} - \frac{y}{\|y\|^2} \right\| = \frac{\|x - y\|}{\|x\| \cdot \|y\|}.$$

**THÉORÈME 1.1** (Inégalité de Cauchy-Schwarz) —  $\forall (x, y) \in E^2, |\langle x | y \rangle| \leq \|x\| \times \|y\|.$

**COROLLAIRE** — Il y a égalité dans l'inégalité de Cauchy-Schwarz (autrement dit,  $|\langle x | y \rangle| = \|x\| \times \|y\|$ ) si et seulement si la famille  $(x, y)$  est liée.

**Exercice 3.** Soit  $(x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ . Montrer que  $\left(\sum_{k=1}^n x_k\right)^2 \leq n \sum_{k=1}^n x_k^2$ . Dans quel cas y a-t-il égalité ?

**THÉORÈME 1.2** (Inégalité triangulaire) —  $\forall (x, y) \in E^2, \|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|.$

**Remarque.** Il y a égalité dans l'inégalité triangulaire lorsque  $\langle x | y \rangle = \|x\| \times \|y\|$ , c'est à dire lorsqu'il y a égalité dans l'inégalité de Cauchy-Schwarz et qu'en plus  $\langle x | y \rangle \geq 0$ , ce qui impose  $x = 0_E$  ou  $y = \lambda x$  avec  $\lambda \geq 0$ .

## 1.2 Orthogonalité

**DÉFINITION.** — Soit  $E$  un espace préhilbertien réel.

- (i) On dit que deux vecteurs  $x$  et  $y$  sont orthogonaux lorsque  $\langle x | y \rangle = 0$ .
- (ii) On dit qu'un vecteur  $x$  est orthogonal à un sous-espace vectoriel  $H$  lorsque  $\forall y \in H, \langle x | y \rangle = 0$ .
- (iii) Enfin, deux sous-espaces vectoriels  $H_1$  et  $H_2$  sont orthogonaux lorsque  $\forall (x, y) \in H_1 \times H_2, \langle x | y \rangle = 0$ .

**Remarque.** On peut noter que deux sous-espaces vectoriels orthogonaux sont nécessairement en somme directe. En effet, si  $x \in H_1 \cap H_2$  alors  $\langle x | x \rangle = 0$ , ce qui impose  $x = 0_E$ . On dit alors que la somme  $H_1 \oplus H_2$  est une somme directe orthogonale, et on pourra éventuellement la noter  $H_1 \perp \oplus H_2$ .

**THÉORÈME 1.3** (Pythagore) — Soient  $H_1$  et  $H_2$  deux sous-espaces vectoriels orthogonaux, et un vecteur  $x = x_1 + x_2 \in H_1 \oplus H_2$ . Alors  $\|x\|^2 = \|x_1\|^2 + \|x_2\|^2$ .

Nous pouvons noter que réciproquement, si nous avons  $\|x_1 + x_2\|^2 = \|x_1\|^2 + \|x_2\|^2$ , alors  $x_1$  et  $x_2$  sont nécessairement orthogonaux.

**DÉFINITION.** — Soit  $A$  une partie quelconque de  $E$ . On appelle orthogonal de  $A$  l'ensemble

$$A^\perp = \{x \in E \mid \forall a \in A, \langle x | a \rangle = 0\}$$

des vecteurs orthogonaux à tout élément de  $A$ . Il s'agit d'un sous-espace vectoriel de  $E$ .

**PROPOSITION 1.4** — Si  $H$  est un sous-espace vectoriel et  $A$  une partie génératrice de  $H$ , alors  $H^\perp = A^\perp$ .

**Remarque.** L'intérêt majeur de ce dernier résultat est qu'en dimension finie, déterminer l'orthogonal d'un sous-espace vectoriel  $H$  revient à déterminer l'orthogonal d'une base de  $H$ .

Lorsque  $H$  est un sous-espace vectoriel,  $H^\perp$  est donc le plus grand des sous-espaces vectoriels (au sens de l'inclusion) qui soit en somme directe orthogonale avec  $H$  :  $H \oplus H^\perp$ .

Attention cependant, cela ne signifie pas pour autant que cette somme soit égale à  $E$ . Il faudra en effet supposer en plus que  $E$  est de dimension finie pour pouvoir affirmer que  $H$  et  $H^\perp$  sont des sous-espaces supplémentaires.

Si  $H_1$  et  $H_2$  sont deux sous-espaces vectoriels de  $E$ , on dispose enfin des équivalences :

$$H_1 \text{ et } H_2 \text{ sont orthogonaux} \iff H_1 \subset H_2^\perp \iff H_2 \subset H_1^\perp.$$

### 1.3 Espaces euclidiens

**DÉFINITION.** — Une famille finie  $(e_1, \dots, e_p)$  de vecteurs de  $E$  est dite orthonormée lorsque :

$$\forall (i, j) \in \llbracket 1, p \rrbracket^2, \quad \langle e_i | e_j \rangle = \delta_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{si } i = j \\ 0 & \text{si } i \neq j \end{cases}$$

**PROPOSITION 1.5** — Une famille orthonormée est libre. En particulier, lorsque  $E$  est de dimension finie  $n$ , une famille orthonormée constituée de  $n$  vecteurs est une base de  $E$ , dite base orthonormée.

On appelle *espace euclidien* tout espace préhilbertien réel de dimension finie. Le résultat précédent définit la notion de base orthonormée, mais ne prouve pas l'existence de celles-ci. C'est l'objet du théorème suivant :

**THÉORÈME 1.6** — Tout espace euclidien possède des bases orthonormées.

Nous reviendrons sur cette construction une fois définie la notion de *projection orthogonale*; elle prendra alors le nom de *procédé d'orthonormalisation de Gram-Schmidt*.

**Exercice 4.** Pouvez-vous donner une base orthonormée de  $\mathbb{R}_n[X]$  muni du produit scalaire défini dans l'exercice 1 ?

#### ■ Expression du produit scalaire dans une base orthonormée

Une fois acquise l'existence de bases orthonormées dans un espace euclidien, il reste à constater que les calculs relatifs au produit scalaire sont très simples une fois exprimés dans une telle base.

Soit  $(e_1, \dots, e_n)$  une base orthonormée d'un espace euclidien  $E$ , et  $x = \sum_{i=1}^n x_i e_i$ ,  $y = \sum_{j=1}^n y_j e_j$ . On pose  $X = \text{Mat}_e(x)$

et  $Y = \text{Mat}_e(y)$ . Alors :

$$\langle x | y \rangle = \sum_{i=1}^n x_i y_i = X^T Y \quad \text{et} \quad \|x\| = \sqrt{\sum_{i=1}^n x_i^2} = \sqrt{X^T X}.$$

En outre, on peut noter que  $\langle e_k | x \rangle = \sum_{i=1}^n x_i \langle e_k | e_i \rangle = x_k$ , donc on dispose dans un espace euclidien d'une expres-

sion simple pour caractériser la décomposition dans une base orthonormée :

$$x = \sum_{k=1}^n \langle e_k | x \rangle e_k.$$

**PROPOSITION 1.7** — Toute forme linéaire de  $E$  s'écrit de manière unique :  $x \mapsto \langle a | x \rangle$ , où  $a$  est un vecteur de  $E$ .

**Exercice 5.** On considère de nouveau l'espace euclidien défini dans les exercices 1 et 4, et on note  $H$  le sous-espace vectoriel des polynômes  $P$  vérifiant  $\sum_{i=0}^n P(a_i) = 0$ . Déterminer l'orthogonal de  $H$ .

### 1.4 Projection orthogonale

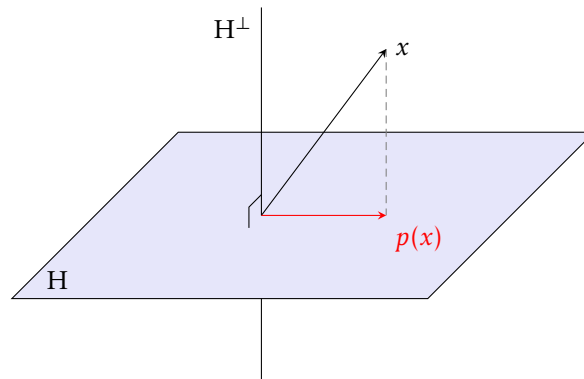
Revenons maintenant à la notion d'orthogonal d'un sous-espace vectoriel  $H$  de  $E$ . Nous avons vu que  $H \oplus H^\perp$  est une somme directe, mais ce n'est qu'en dimension finie qu'on sera assuré d'être en présence de deux sous-espaces supplémentaires :

**THÉORÈME 1.8** — Si  $E$  est un espace euclidien et  $H$  un de ses sous-espaces vectoriels, alors  $E = H \oplus H^\perp$ . En particulier, nous avons donc  $\dim H^\perp = \dim E - \dim H$ .

**COROLLAIRE** — Lorsque  $H$  est un sous-espace vectoriel d'un espace euclidien  $E$ , alors  $H^{\perp\perp} = H$ .

**Remarque.** Dans un espace préhilbertien de dimension quelconque, on peut seulement affirmer que  $H \subset H^{\perp\perp}$ .

**DÉFINITION.** — On appelle projection orthogonale sur un sous-espace vectoriel  $H$  d'un espace euclidien  $E$  la projection vectorielle sur  $H$  parallèlement à  $H^\perp$ .



Lorsque  $p$  est la projection orthogonale sur  $H$  et  $(e_1, \dots, e_k)$  une base orthonormée de  $H$  on a :

$$\forall x \in E, \quad p(x) = \sum_{j=1}^k \langle e_j | x \rangle e_j.$$

On peut observer que cette dernière formule fait intervenir *uniquement* une base de  $H$ , ce qui nous permet d'étendre la notion de projection orthogonale au cas d'une sous-espace vectoriel  $H$  de dimension finie d'un espace préhilbertien réel  $E$  de dimension quelconque. Autrement dit, on adopte la définition suivante :

**DÉFINITION.** — Soit  $H$  un sous-espace de dimension finie d'un espace préhilbertien réel  $E$ , et  $(e_1, \dots, e_k)$  une base orthonormée de  $H$ . On appelle projection orthogonale sur  $H$  l'application linéaire  $p : E \rightarrow E$  définie par la formule encadrée ci-dessus.

Lorsqu'on ne dispose pas d'une base orthonormée de  $H$ , on utilise pour caractériser le vecteur  $p(x)$  le résultat suivant :

**PROPOSITION 1.9** —  $p(x)$  est l'unique vecteur de  $E$  vérifiant les conditions :  $\begin{cases} p(x) \in H \\ x - p(x) \in H^\perp \end{cases}$

Revenons maintenant un instant sur une notion que nous avons définie dans le chapitre consacré aux espaces vectoriels normés : si  $x \in E$  et si  $H$  est un sous-espace vectoriel de  $E$ , on appelle *distance* de  $x$  à  $H$  la quantité :  $d(x, H) = \inf\{\|x - h\| \mid h \in H\}$ . Dans le cas où  $H$  est un sous-espace vectoriel de dimension finie d'un espace préhilbertien réel, le résultat suivant va nous permettre de calculer cette distance :

**PROPOSITION 1.10** — L'application  $\begin{pmatrix} H & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ h & \longmapsto & \|x - h\| \end{pmatrix}$  atteint un minimum en un unique point, à savoir  $h = p(x)$ . Autrement dit,  $d(x, H) = \|x - p(x)\|$ .

**Exercice 6.** Soit  $E$  un espace euclidien de dimension 4,  $(e)$  une base orthonormée et  $u = 3e_1 + 2e_2 - e_3 + e_4$ ,  $v = 2e_1 + 5e_2 - e_4$ . On note  $H = \text{Vect}(u, v)$ . Calculer la distance de  $H$  au vecteur  $w = e_1 + e_2 + e_3 + e_4$ .

### ■ Orthonormalisation par la méthode de Gram-Schmidt

Considérons une famille libre  $(x_1, \dots, x_k)$  de  $E$ , et notons  $p_j$  la projection orthogonale sur  $\text{Vect}(x_1, \dots, x_{j-1})$  (avec la convention  $p_1 = 0$ ). Alors la famille  $(e)$  définie par les formules suivantes :

$$\forall j \in \llbracket 1, k \rrbracket, \quad e_j = \frac{x_j - p_j(x_j)}{\|x_j - p_j(x_j)\|}$$

est une famille orthonormée vérifiant :  $\forall j \in \llbracket 1, k \rrbracket, \text{Vect}(e_1, \dots, e_j) = \text{Vect}(x_1, \dots, x_j)$ .

C'est en outre l'unique famille vérifiant en plus les conditions :  $\forall j \in \llbracket 1, k \rrbracket, \langle x_j | e_j \rangle > 0$ .

**Exemple.** Considérons l'espace euclidien  $\mathbb{R}^3$  muni du produit scalaire usuel, ainsi que la famille de vecteurs

$x_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, x_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$  et  $x_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ , et appliquons lui la méthode de Gram-Schmidt :

$$- e_1 = \frac{x_1}{\|x_1\|} \text{ donc } e_1 = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

$$- p(x_2) = \langle e_1 | x_2 \rangle e_1 = \frac{8}{5} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \text{ donc } x_2 - p(x_2) = \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} \text{ et } e_2 = \frac{1}{\sqrt{30}} \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

$$- p(x_3) = \langle e_1 | x_3 \rangle e_1 + \langle e_2 | x_3 \rangle e_2 = \frac{2}{3} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ donc } x_3 - p(x_3) = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ et } e_3 = \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

### ● Utilisation de Python

Le procédé de Gram-Schmidt est de nature algorithmique et à ce titre se prête bien à la programmation. En voici une mise en œuvre :

```
import numpy as np
from numpy.linalg import norm

def gramschmidt(x):
    e = [None] * len(x)
    for j in range(len(x)):
        pj = np.zeros_like(x[j]) # projection orthogonale de xj
        for i in range(j):
            pj = pj + np.dot(e[i], x[j]) * e[i]
        e[j] = (x[j] - pj) / norm(x[j] - pj)
    return e
```

$x$  est une liste de vecteurs de mêmes dimensions et supposés linéairement indépendants ; la fonction renvoie la liste de vecteurs orthonormés obtenu par le procédé de Gram-Schmidt. Pour reprendre l'exemple précédent, on écrirait :

```
In [1]: x = [np.array([0, 1, 2]), np.array([1, 2, 3]), np.array([1, 0, 1])]

In [2]: gramschmidt(x)
Out[2]: [array([ 0.          ,  0.4472136 ,  0.89442719]),
         array([ 0.91287093,  0.36514837, -0.18257419]),
         array([ 0.40824829, -0.81649658,  0.40824829])]
```

**Exercice 7.** On muni  $\mathbb{R}[X]$  du produit scalaire :  $\langle P | Q \rangle = \int_0^{+\infty} P(t)Q(t)e^{-t} dt$ . À l'aide du procédé de Schmidt appliqué à la base canonique de  $\mathbb{R}[X]$ , justifier l'existence d'une unique famille *échelonnée en degré* de polynômes unitaires  $(P_n)_{n \in \mathbb{N}}$  et deux à deux orthogonaux (il s'agit des polynômes de Laguerre). Calculer  $P_0, P_1, P_2, P_3$ .

## 2. Endomorphismes dans un espace euclidien

### 2.1 Isométries vectorielles

**DÉFINITION.** — Si  $E$  est un espace préhilbertien, on appelle isométrie vectorielle un endomorphisme  $u \in \mathcal{L}(E)$  compatible avec le produit scalaire, c'est à dire vérifiant :  $\forall (x, y) \in E^2, \langle u(x) | u(y) \rangle = \langle x | y \rangle$ .

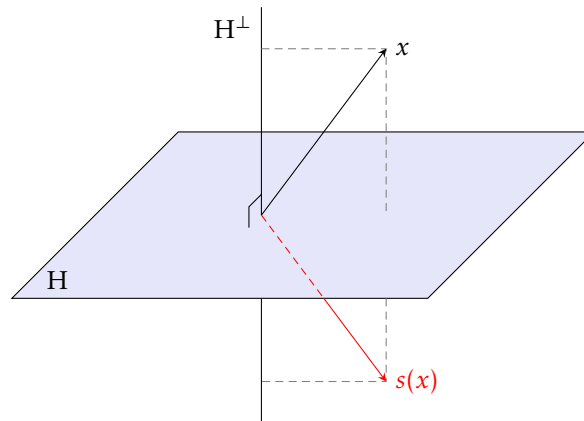
Une telle application est *a fortiori* compatible avec la norme euclidienne : en posant  $y = x$  on obtient  $\forall x \in E, \|u(x)\| = \|x\|$ , ce qui explique leur nom. Le fait remarquable est que la réciproque est vraie :

**PROPOSITION 2.1** —  $u \in \mathcal{L}(E)$  est une isométrie vectorielle si et seulement si  $\forall x \in E, \|u(x)\| = \|x\|$ .

En conséquence de quoi une isométrie vectorielle est injective : en effet, lorsque  $u(x) = 0_E$  nous avons  $\|x\| = \|u(x)\| = 0$  et donc  $x = 0_E$ . Et en particulier, lorsque  $E$  est de dimension finie, une isométrie vectorielle est nécessairement inversible. Un endomorphisme inversible étant appelé un *automorphisme*, en dimension finie les isométries vectorielles portent aussi le nom d'*automorphisme orthogonal*.

On notera  $\mathcal{O}(E)$  l'ensemble des isométries vectorielles de  $E$  ; il est appelé le *groupe orthogonal* de  $E$ .

**Exemple.** On appelle *symétrie orthogonale* par rapport à un sous-espace vectoriel  $H$  la symétrie par rapport à  $H$ , parallèlement à  $H^\perp$ . Il s'agit d'une isométrie vectorielle.



Posons  $x = x_1 + x_2$  avec  $x_1 \in H$  et  $x_2 \in H^\perp$ . Alors  $\|s(x)\|^2 = \|x_1\|^2 + \|x_2\|^2 = \|x\|^2$  donc  $s$  préserve la norme ; il s'agit bien d'une isométrie vectorielle.

**Attention.** Une symétrie orthogonale est un automorphisme orthogonal (*ie* une isométrie vectorielle), mais ce n'est pas le cas d'une projection orthogonale (qui, hormis l'identité, n'est pas inversible).

**Remarque.** Une symétrie orthogonale par rapport à un hyperplan (un sous-espace vectoriel de dimension  $p-1$ ) est aussi appelée une *réflexion*. En dimension 2, les réflexions sont donc les symétries orthogonales par rapport aux droites, en dimension 3 les symétries orthogonales par rapport aux plans.

**Exercice 8.** Soient  $a$  et  $b$  deux vecteurs non nuls distincts d'un espace euclidien  $E$  vérifiant  $\|a\| = \|b\|$ . Montrer qu'il existe une unique réflexion  $s$  telle que  $s(a) = b$ .

**PROPOSITION 2.2** — Soit  $u \in \mathcal{O}(E)$  une isométrie vectorielle, et  $H$  un sous-espace vectoriel de  $E$  stable par  $u$ . Alors  $H^\perp$  est aussi stable par  $u$ .

#### ■ Interprétation matricielle d'une isométrie vectorielle

**PROPOSITION 2.3** — Soit  $(e_1, \dots, e_p)$  une base orthonormée de  $E$ , et  $u \in \mathcal{L}(E)$ . Alors  $u$  est une isométrie vectorielle si et seulement si  $(u(e_1), \dots, u(e_p))$  est une base orthonormée.

**COROLLAIRE** — Soit  $(e_1, \dots, e_n)$  une base orthonormée,  $u \in \mathcal{L}(E)$ , et  $A = \text{Mat}_e(u)$ . Alors  $u$  est une isométrie vectorielle si et seulement si  $A^T A = I$ , ou encore  $AA^T = I$ .

Une matrice  $A \in \mathcal{M}_p(\mathbb{R})$  qui vérifie l'une de ces deux identités équivalentes  $A^T A = I$  ou  $AA^T = I$  est appelée une matrice *orthogonale*. On note  $\mathcal{O}_p(\mathbb{R})$  l'ensemble des matrices orthogonales de  $\mathcal{M}_p(\mathbb{R})$ ; ensemble qu'on appelle le *groupe orthogonal* d'ordre  $p$ .

**Remarque.** Si on observe que  $\text{Mat}_{(e)}(u) = \text{Mat}_{(e)}(u(e_1), u(e_2), \dots, u(e_p))$ , on peut affirmer qu'une matrice orthogonale est une matrice dont les colonnes forment une famille orthonormée pour le produit scalaire usuel. C'est souvent par l'intermédiaire de cette propriété que l'on reconnaît une matrice orthogonale. Une autre conséquence de cette observation réside dans la :

**PROPOSITION 2.4** — *La matrice de passage entre deux bases orthonormées est une matrice orthogonale.*

### • Structure de groupe

Le vocable *groupe* a une signification particulière en mathématiques, et ce n'est pas par hasard s'il est employé ici. Sans rentrer dans les détails, l'emploi de ce terme implique les propriétés suivantes :

- (i) la matrice  $I_p$  est orthogonale :  $I_p \in \mathcal{O}_p(\mathbb{R})$ ;
- (ii) si  $A$  et  $B$  sont orthogonales,  $AB$  est aussi orthogonale :  $(A, B) \in \mathcal{O}_p(\mathbb{R})^2 \implies AB \in \mathcal{O}_p(\mathbb{R})$ ;
- (iii) si  $A$  est orthogonale,  $A^{-1}$  aussi :  $A \in \mathcal{O}_p(\mathbb{R}) \implies A^{-1} \in \mathcal{O}_p(\mathbb{R})$ .

Notons en outre pour ce dernier point que  $A^{-1} = A^T$ .

**PROPOSITION 2.5** — *Soit  $u$  une isométrie vectorielle. Alors  $\det u \in \{-1, 1\}$ .*

Ce dernier résultat permet de séparer les isométries vectorielles en deux classes : ceux dont le déterminant est égal à 1 (les isométries directes) :  $\mathcal{SO}(E) = \{u \in \mathcal{O}(E) \mid \det u = 1\}$ , qui forment eux aussi un groupe, appelé le *groupe spécial orthogonal*, et ceux dont le déterminant est égal à  $-1$  (les isométries indirectes, qui n'ont pas de structure algébrique particulière). On notera bien entendu de même :  $\mathcal{SO}_p(\mathbb{R}) = \{A \in \mathcal{O}_p(\mathbb{R}) \mid \det A = 1\}$ .

**Exemple.** Si  $u$  est une réflexion, alors  $\det u = -1$ .

### • Orientation d'un espace euclidien

Considérons l'ensemble  $\mathcal{B}$  des bases orthonormées d'un espace euclidien  $E$ . Si  $(e)$  et  $(e')$  sont deux éléments de  $\mathcal{B}$ ,  $P = \text{Mat}_{(e)}(e')$  est une matrice orthogonale donc  $\det P = \pm 1$ . On définit donc une relation  $\mathcal{R}$  sur  $\mathcal{B}$  en posant :  $(e) \mathcal{R} (e') \iff \det \text{Mat}_{(e)}(e') = 1$ .

**PROPOSITION 2.6** — *La relation  $\mathcal{R}$  est une relation d'équivalence qui possède deux classes d'équivalence distinctes.*

**DÉFINITION.** — *Orienter l'espace  $E$ , c'est choisir l'une de ces deux classes d'équivalence ; les bases orthonormées de cette classe seront qualifiées de bases directes, les autres de bases indirectes.*

**Remarque.** Pour orienter l'espace, il suffit de choisir une base  $(e)$  et la qualifier de directe. Une fois ce choix fait, une base orthonormée  $(e')$  sera directe si  $\det_{(e)}(e') = 1$ , et indirecte si  $\det_{(e)}(e') = -1$ .

**PROPOSITION 2.7** — *Si l'espace  $E$  est orienté et si  $u \in \mathcal{O}(E)$  est une isométrie vectorielle, alors  $u$  appartient à  $\mathcal{SO}(E)$  si et seulement si l'image par  $u$  d'une base orthonormée directe est une base orthonormée directe. Autrement dit, les isométries directes sont celles qui préservent l'orientation de l'espace.*

Une dernière conséquence de la notion de base orthonormée directe est le

**THÉORÈME 2.8** — *Si  $(e)$  et  $(e')$  sont deux bases orthonormées directes et  $(x_1, \dots, x_p)$  une famille de  $p$  vecteurs de  $E$  alors  $\det_{(e)}(x_1, \dots, x_p) = \det_{(e')}(x_1, \dots, x_p)$ . Autrement dit, le déterminant d'une famille de vecteurs ne dépend pas du choix de la base orthonormée directe dans laquelle on réalise le calcul.*

## 2.2 Isométries vectorielles d'un plan euclidien

Dans cette section,  $E$  désigne un plan euclidien orienté,  $(e_1, e_2)$  une base orthonormée directe, et  $u \in \mathcal{O}(E)$ .

Notons  $A = \text{Mat}_{(e)}(u) = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}$ .  $A$  est une matrice orthogonale, ce qui se traduit par

$$\begin{cases} a^2 + b^2 = 1 \\ c^2 + d^2 = 1 \\ ac + bd = 0 \end{cases}$$

La première égalité traduit l'existence d'un réel  $\alpha$  (défini de manière unique modulo  $2\pi$ ) tel que  $a = \cos \alpha$  et  $b = \sin \alpha$ . De même, la seconde égalité traduit l'existence d'un réel  $\beta$  pour lequel  $d = \cos \beta$  et  $c = \sin \beta$ .

La troisième égalité s'écrit alors  $\cos \alpha \sin \beta + \sin \alpha \cos \beta = 0$ , soit  $\sin(\alpha + \beta) = 0$ . Ainsi, nous avons  $\beta \equiv -\alpha \pmod{\pi}$ , ce qui laisse deux possibilités (sachant que  $\beta$  est unique modulo  $2\pi$ ) :  $\beta = -\alpha$  ou  $\beta = \pi - \alpha$ .

Les matrices de  $\mathcal{O}_2(\mathbb{R})$  sont donc de deux types uniquement :

$$A_1 = \begin{pmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha \\ \sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix} \text{ (lorsque } \beta = -\alpha) \quad \text{ou} \quad A_2 = \begin{pmatrix} \cos \alpha & \sin \alpha \\ \sin \alpha & -\cos \alpha \end{pmatrix} \text{ (lorsque } \beta = \pi - \alpha).$$

$\det A_1 = 1$  et  $\det A_2 = -1$  donc les isométries vectorielles directes sont associées aux matrices de type  $A_1$ , et les isométries indirectes aux matrices de type  $A_2$ .

### ■ Isométries directes du plan euclidien orienté

Nous avons donc  $\mathcal{SO}_2(\mathbb{R}) = \{R(\alpha) \mid \alpha \in [0, 2\pi[ \}$ , où  $R(\alpha)$  désigne la matrice  $\begin{pmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha \\ \sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix}$ .

**PROPOSITION 2.9** —  $\mathcal{SO}_2(\mathbb{R})$  est un groupe commutatif, et  $R(\alpha)R(\beta) = R(\alpha + \beta)$ .

**COROLLAIRE** — Si  $\text{Mat}_{(e)}(u) = R_\alpha$ , la valeur de  $\alpha$  est indépendante du choix de la base orthonormée directe  $(e)$ ; on dit que  $u$  est la rotation d'angle  $\alpha$ .

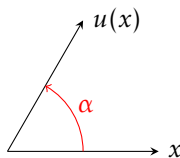


FIGURE 1 – Action d'une rotation vectorielle d'angle  $\alpha$ .

**Remarque.** Les matrices de  $\mathcal{SO}_2(\mathbb{R})$  sont aussi les matrices de passage d'une base orthonormée directe à une autre; ainsi nous venons de prouver que nous ne pouvons passer d'une base orthonormée directe à une autre que par l'action d'une rotation.

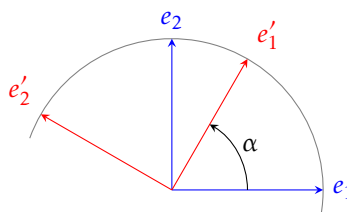


FIGURE 2 – Passage d'une base orthonormée directe à une autre.

#### ● Comment mesurer l'angle d'une rotation ?

Si  $x$  est un vecteur non nul, il est toujours possible de construire une base orthonormée directe  $(e_1, e_2)$  telle que  $e_1 = \frac{x}{\|x\|}$ . On a alors  $u(e_1) = \cos \alpha e_1 + \sin \alpha e_2$  et

$$\langle e_1 \mid u(e_1) \rangle = \cos \alpha \quad \text{et} \quad \det(e_1, u(e_1)) = \sin \alpha$$



On en déduit deux formules qui permettent de calculer  $\cos \alpha$  et  $\sin \alpha$  et par leur intermédiaire de déterminer l'angle d'une rotation à partir de l'image d'un vecteur non nul quelconque :

$$\cos \alpha = \frac{\langle x | u(x) \rangle}{\|x\|^2} \quad \text{et} \quad \sin \alpha = \frac{\det(x, u(x))}{\|x\|^2}$$

ce dernier déterminant pouvant être calculé dans une base orthonormée directe quelconque.

### ■ Isométries indirectes du plan euclidien orienté

Revenons à la matrice  $A_2 = \begin{pmatrix} \cos \alpha & \sin \alpha \\ \sin \alpha & -\cos \alpha \end{pmatrix}$  et cherchons à la diagonaliser.

On calcule sans peine  $\chi_{A_2}(x) = x^2 - 1 = (x-1)(x+1)$  donc  $\text{Sp}(A_2) = \{-1, 1\}$ ; la matrice  $A_2$  est diagonalisable.

On résout  $A_2 X = X \iff X \in \text{Vect} \begin{pmatrix} \cos(\alpha/2) \\ \sin(\alpha/2) \end{pmatrix}$  et  $A_2 X = -X \iff X \in \text{Vect} \begin{pmatrix} -\sin(\alpha/2) \\ \cos(\alpha/2) \end{pmatrix}$

Posons  $P = \begin{pmatrix} \cos(\alpha/2) & -\sin(\alpha/2) \\ \sin(\alpha/2) & \cos(\alpha/2) \end{pmatrix}$ ;  $P$  est la matrice de la rotation d'angle  $\alpha/2$  donc la base  $(e')$  obtenue par

$\text{Mat}_{(e)}(e')$  est une base orthonormée directe dans laquelle  $\text{Mat}_{(e')}(u) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ . L'isométrie indirecte  $u \in \mathcal{O}(E)$  est donc une symétrie orthogonale par rapport à la droite engendrée par le vecteur  $e'_2$ .

Nous avons donc prouvé que les isométries indirectes du plan euclidien orienté sont les réflexions, autrement dit les symétries orthogonales par rapports aux droites.

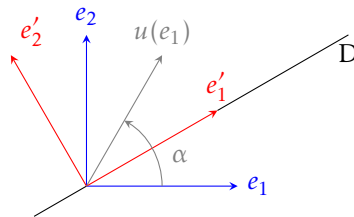


FIGURE 3 – Action d'une réflexion par rapport à la droite  $D$ .

## 2.3 Endomorphismes symétriques

**DÉFINITION.** — On dit qu'un endomorphisme  $u \in \mathcal{L}(E)$  est symétrique lorsqu'il vérifie :  $\forall (x, y) \in E^2$ ,

$$\langle u(x) | y \rangle = \langle x | u(y) \rangle.$$

**THÉORÈME 2.10** — Si  $(e)$  est une base orthonormée de  $E$  et  $A = \text{Mat}_e(u)$ , alors  $u$  est symétrique si et seulement si  $A^T = A$ , c'est à dire si et seulement si  $A$  est symétrique, ce qui explique le nom de ces endomorphismes.

**Attention.** Si  $(e)$  n'est pas une base orthonormée, la matrice associée dans cette base à un endomorphisme symétrique peut très bien ne pas être symétrique.

**Remarque.** L'ensemble  $\mathcal{S}(E)$  des endomorphismes symétriques de  $E$  est un sous-espace vectoriel de  $\mathcal{L}(E)$ , de dimension  $\frac{p(p+1)}{2}$ .

**Exercice 9.** Soient  $u$  et  $v$  deux endomorphismes symétriques. Montrer que  $u \circ v$  est symétrique si et seulement si  $u \circ v = v \circ u$ .

### ■ Réduction des endomorphismes symétriques

De nombreuses applications des endomorphismes symétriques résultent du fait que ce sont les seuls endomorphismes diagonalisables dans les bases orthonormées, résultat que nous allons nous attacher à prouver maintenant.

**PROPOSITION 2.11** — Si  $u$  est un endomorphisme symétrique, ses sous-espaces propres sont en somme directe orthogonale.

**PROPOSITION 2.12** — Soit  $H$  un espace vectoriel stable par un endomorphisme symétrique  $u$ . Alors  $H^\perp$  est aussi stable par  $u$ .

**LEMME** — Un endomorphisme symétrique possède au moins une valeur propre réelle.

**THÉORÈME 2.13** — Un endomorphisme symétrique est diagonalisable dans une base orthonormée.

**COROLLAIRE** — Si  $A$  est une matrice symétrique, il existe une matrice diagonale  $D$  et une matrice orthogonale  $P$  telles que  $A = PDP^T$  (rappelons que  $P^{-1} = P^T$ ).

**Exercice 10.** Diagonaliser sur une base orthonormée la matrice  $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \\ -1 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & -1 \end{pmatrix}$ .

### 3. Exercices

#### Produit scalaire

**Exercice 11** Soit  $E$  un espace euclidien,  $a \in E$  tel que  $\|a\| = 1$ , et  $k \in \mathbb{R}$ . On définit  $\phi : E \times E \rightarrow \mathbb{R}$  en posant :

$$\forall (x, y) \in E^2, \quad \phi(x, y) = \langle x | y \rangle + k \langle x | a \rangle \langle y | a \rangle.$$

À quelle condition nécessaire et suffisante  $\phi$  est-il un produit scalaire ?

**Exercice 12** Soient  $x_1, \dots, x_n$  des réels strictement positifs vérifiant  $\sum_{i=1}^n x_i = 1$ . Prouver que  $\sum_{i=1}^n \frac{1}{x_i} \geq n^2$ . Dans quel cas y-a-t-il égalité ?

**Exercice 13** On considère un espace euclidien  $E$  de dimension 3 muni d'une base orthonormée  $(e)$ . On note  $P$  le plan d'équation :  $2x_1 + x_2 + 2x_3 = 0$  dans cette base,  $p$  la projection orthogonale sur  $P$ , et  $v$  le vecteur de coordonnées  $(x, y, z)$  dans la base  $(e)$ . Déterminer une base orthonormée  $(e'_1, e'_2)$  de  $P$ , en déduire l'expression du vecteur  $p(v)$  dans la base  $(e)$ , puis la matrice associée à  $p$  dans la base  $(e)$ .

**Exercice 14** On considère un espace euclidien  $E$  de dimension 3, et  $(e_1, e_2, e_3)$  une base orthonormée de  $E$ . Déterminer la matrice associée dans la base  $(e)$  à la projection vectorielle sur le plan d'équation  $x + y + z = 0$ .

**Exercice 15** Montrer que l'application  $(P, Q) \mapsto \int_0^{+\infty} P(t)Q(t)e^{-t} dt$  définit un produit scalaire sur  $\mathbb{R}[X]$ , et utiliser cette remarque pour calculer  $\inf_{(a,b) \in \mathbb{R}^2} \int_0^{+\infty} e^{-t}(t^k - at - b)^2 dt$  pour tout entier  $k \geq 2$ .

**Exercice 16** Soit  $E$  un espace euclidien de dimension  $n$ . À  $(x_1, \dots, x_p) \in E^p$  on associe le déterminant de Gram :

$$G(x_1, \dots, x_p) = \det(\langle x_i | x_j \rangle)_{1 \leq i, j \leq p}.$$

Montrer que  $G(x_1, \dots, x_p) = \det(A^T A)$ , où  $A = \text{Mat}_e(x_1, \dots, x_p)$  et  $(e)$  une base orthonormée quelconque de  $E$ . En déduire que  $G(x_1, \dots, x_p) \geq 0$ , avec égalité si et seulement si la famille  $(x_1, \dots, x_p)$  est liée.

**Exercice 17** Soit  $E$  un espace euclidien de dimension  $n$ ,  $(u_1, \dots, u_n)$  une base de  $E$ , et  $(e_1, \dots, e_n)$  la base orthonormée obtenue par le procédé de Schmidt à partir de  $(u_1, \dots, u_n)$ . On note  $R = \text{Mat}_e(u_1, \dots, u_n)$  la matrice des composantes dans la base  $(e)$  de la famille de vecteurs  $(u_1, \dots, u_n)$ .

Justifier l'affirmation : «  $R$  est une matrice triangulaire supérieure », et en déduire que  $|\det R| \leq \prod_{i=1}^n \|u_i\|$ .

On considère maintenant une matrice inversible  $A = (a_{ij}) \in \mathcal{GL}_n(\mathbb{R})$  quelconque. Démontrer l'existence d'une matrice orthogonale  $Q$  et d'une matrice triangulaire supérieure  $R$  vérifiant :  $A = QR$ .

En déduire que si les coefficients de  $A$  vérifient :  $\forall (i, j) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2, |a_{ij}| \leq 1$ , alors  $|\det A| \leq n^{n/2}$ . Peut-on avoir égalité ?

## Endomorphismes d'un espace euclidien

**Exercice 18** Soit  $p$  une projection d'un espace euclidien  $E$ ; montrer qu'il s'agit d'une projection orthogonale si et seulement si pour tout  $(x, y) \in E^2$ ,  $\langle p(x) | y \rangle = \langle x | p(y) \rangle$ .

**Exercice 19** Soit  $p$  une projection vectorielle d'un espace euclidien  $E$ . Montrer que  $p$  est une projection orthogonale si et seulement si :  $\forall x \in E, \|p(x)\| \leq \|x\|$ .

**Exercice 20** Soit  $E$  un espace euclidien,  $\lambda \in \mathbb{R}$  et  $a \in E$ . On considère  $u : \begin{pmatrix} E & \rightarrow & E \\ x & \mapsto & x + \lambda \langle x | a \rangle a \end{pmatrix}$ .

À quelle condition a-t-on  $u \in \mathcal{O}(E)$ ? Dans ce cas, décrire  $u$ .

**Exercice 21** Soit  $A = (a_{ij}) \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$  une matrice orthogonale,  $(e)$  une base orthonormée d'un espace euclidien  $E$ , et  $u \in \mathcal{O}(E)$  défini par :  $\text{Mat}_e(u) = A$ . Justifier que  $a_{ij} = \langle e_i | u(e_j) \rangle$ , et en déduire que :  $\left| \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_{ij} \right| \leq n$ .

**Exercice 22** Soit  $E$  un espace euclidien, et  $u \in \mathcal{O}(E)$  une isométrie vectorielle. On pose  $v = u - \text{Id}$ . Montrer que  $\text{Im } v = (\text{Ker } v)^\perp$ .

En déduire que la suite  $u_n = \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^n u^k$  converge vers  $p$ , projection orthogonale sur  $\text{Ker } v$ .

**Exercice 23** Soit  $E$  un espace euclidien et  $u$  et  $v$  deux endomorphismes symétriques qui commutent :  $u \circ v = v \circ u$ .

Soit  $\lambda$  une valeur propre de  $u$ , et  $E_\lambda$  le sous-espace propre associé. Montrer que  $E_\lambda$  est stable par  $v$ , et que la restriction de  $v$  à  $E_\lambda$  est un endomorphisme symétrique de  $E_\lambda$ .

En déduire l'existence d'une base orthonormée  $(e)$  telle que  $\text{Mat}_e(u)$  et  $\text{Mat}_e(v)$  soient diagonales.

**Exercice 24** Soit  $A \in \mathcal{M}_p(\mathbb{R})$  une matrice antisymétrique, c'est-à-dire vérifiant :  $A^T = -A$ . Montrer que  $\text{Im } A$  et  $\text{Ker } A$  sont des sous-espaces vectoriels orthogonaux, et en déduire que  $\text{rg}(A)$  est un entier pair.