Chapitre 1

Espaces vectoriels

Dans ce chapitre, les exemples numériques seront traités en Python. Nous supposerons les deux modules numpy et numpy.linalg importés par le biais des instructions :

```
import numpy as np
import numpy.linalg as alg
```

1. Structures vectorielles

La notion d'*espace vectoriel* naît conceptuellement de la géométrie affine avec l'introduction au XVII^e^ siècle des coordonnées dans un repère du plan ou de l'espace usuel. Les *vecteurs* sont introduits progressivement au cours de la première moitié du XIX^e^ siècle, et en 1857, Cayley introduit la notation *matricielle*, qui permit d'harmoniser les notations et de simplifier l'écriture des applications linéaires entre espaces vectoriels.

1.1 Espaces vectoriels

Dans tout le chapitre, $\mathbb{K}$ désigne l'un des deux corps $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

Définition. — *On appelle* espace vectoriel *sur* $\mathbb{K}$ *(ou* $\mathbb{K}$*-espace vectoriel) tout triplet* $(\mathrm{E},+,\cdot)$, *où* $+$ *est une loi de composition interne munissant* E *d'une structure de groupe commutatif et* $\cdot : \mathbb{K}\times\mathrm{E}\to\mathrm{E}$ *une loi externe vérifiant :*

$$\forall (x,y)\in\mathrm{E}^2,\quad \forall(\lambda,\mu)\in\mathbb{K}^2,\qquad \begin{aligned}&\lambda\cdot(x+y)=\lambda\cdot x+\lambda\cdot y\\&(\lambda+\mu)\cdot x=\lambda\cdot x+\mu\cdot x\\&\lambda\cdot(\mu x)=(\lambda\mu)\cdot x\\&1\cdot x=x\end{aligned}$$

Remarque. Par la suite, on conviendra de noter λx en lieu et place de $\lambda\cdot x$, et on notera 0_E le vecteur nul de E, pour éviter de le confondre avec le scalaire nul 0.

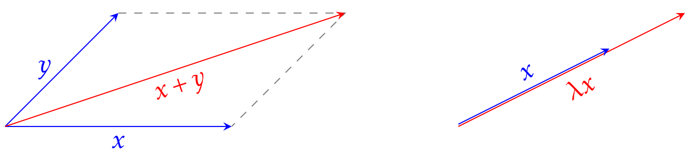

Figure 1 – Représentation graphique de l'addition et de la multiplication par un scalaire.

Définition. (Produit de deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels) — *Si* E *et* F *sont deux* $\mathbb{K}$*-espaces vectoriels, on munit leur produit cartésien* $\mathrm{E}\times\mathrm{F}$ *d'une structure de* $\mathbb{K}$*-espace vectoriel en définissant somme et produit externe de la façon suivante :*

(i) *pour tout* (x,y) *et* (x',y') *dans* $\mathrm{E}\times\mathrm{F}$, $(x,y)+(x',y')=(x+x',y+y')$;

(ii) *pour tout* $(x,y)\in\mathrm{E}\times\mathrm{F}$ *et* $\lambda\in\mathrm{K}$, $\lambda(x,y)=(\lambda x,\lambda y)$.

Cette définition s'étend naturellement au produit d'un nombre fini quelconque de $\mathbb{K}$-espaces vectoriels.

■ Quelques exemples de référence

• **Le $\mathbb{K}$-espace vectoriel $\mathbb{K}^n$**
C'est l'espace vectoriel obtenu sur le produit cartésien $\mathrm{K}\times\cdots\times\mathbb{K}$, autrement dit sur l'ensemble des n-uplets $(x_1,x_2,\ldots,x_n)$ où x_1, x_2, …, x_n sont éléments de $\mathbb{K}$.

Cet espace vectoriel est représenté en Python par le type `np.array`. Voici par exemple comment on définit les vecteurs $x = (1,4,-7)$ et $y = (-2,0,8)$ de $\mathbb{R}^3$:

```
x = np.array([1, 4, -7], dtype=float)
y = np.array([-2, 0, 8], dtype=float)
```

les opérateurs + et * réalisent l'addition de deux vecteurs et la multiplication par un scalaire :

```
In [1]: x + y
Out[1]: array([-1., 4., 1.])

In [2]: 5 * x
Out[2]: array([5., 20., -35.])
```

• **Le $\mathbb{K}$-espace vectoriel** $\mathbb{K}[X]$
C'est l'ensemble des polynômes à coefficients dans $\mathbb{K}$. Il est représenté en Python par la classe `Polynomial` du module `numpy.polynomial`. Voici par exemple comment on définit les polynômes $P = X^3 - 2X^2 + 5$ et $Q = X^2 + 7X - 6$:

```
p = Polynomial([5, 0, -2, 1])
q = Polynomial([-6, 7, 1])
```

(La liste des coefficients est décrite par ordre croissant d'indice). Les opérateurs + et * réalisent l'addition de deux vecteurs et la multiplication par un scalaire :

```
In [1]: (p+q).coef
Out[1]: array([-1.,  7., -1.,  1.])

In [2]: (2 * p).coef
Out[2]: array([ 10.,   0.,  -4.,   2.])
```

(L'attribut `coef` donne la liste des coefficients d'un polynôme).

Remarque. L'opérateur * permet aussi de réaliser le produit de deux polynômes.

• **Le $\mathbb{K}$-espace vectoriel** $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$
C'est l'ensemble des matrices n lignes et p colonnes à coefficients dans $\mathbb{K}$. Il est représenté en Python par le type `np.array`. Voici par exemple comment on définit les matrices

$$M = \begin{pmatrix} 2 & -5i & 8 \\ 0 & 4 & 1-i \end{pmatrix} \qquad \text{et} \qquad N = \begin{pmatrix} 7 & -1 & 0 \\ 2+3i & 5 & -1 \end{pmatrix}$$

```
m = np.array([ [2, -5j, 8], [0, 4, 1-1j] ], dtype=complex)
n = np.array([ [7, -1, 0], [2+3j, 5, -1] ], dtype=complex)
```

les opérateurs + et * réalisent l'addition de deux vecteurs et la multiplication par un scalaire :

```
In [1]: m + n
Out[1]: array([[ 9.+0.j, -1.-5.j,  8.+0.j],
              [ 2.+3.j,  9.+0.j,  0.-1.j]])

In [2]: (1 + 2j) * m
Out[2]: array([[  2. +4.j,  10. -5.j,   8.+16.j],
              [  0. +0.j,   4. +8.j,   3. +1.j]])
```

Attention. L'opérateur * entre deux matrices ne calcule pas le produit matriciel ! Pour multiplier deux matrices entre-elles il faut utiliser la fonction (ou la méthode) `dot` du module `numpy`.

1.2 Sous-espaces vectoriels

Si E est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel, un *sous-espace vectoriel* de E est une partie H non vide et stable par combinaison linéaire. H est alors lui aussi muni d'une structure de $\mathbb{K}$-espace vectoriel, ce qui justifie sa dénomination.

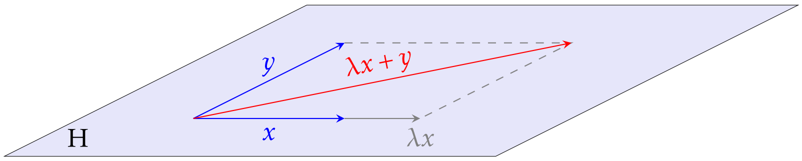

FIGURE 2 – Une représentation graphique en perspective d'un sous-espace vectoriel.

Pour prouver qu'une partie H est un sous-espace vectoriel de E, on utilise le plus souvent le résultat suivant :

PROPOSITION 1.1 — H *est un sous-espace vectoriel de* E *si et seulement si :*

(i) $0_E \in H$ *(ou* $H \neq \varnothing$*) ;*

(ii) $\forall (x,y) \in H^2, \forall \lambda \in \mathbb{K}, \quad \lambda x + y \in H$.

Exercice 1. Déterminer si les ensembles H sont ou ne sont pas des sous-espaces vectoriels de E :

- $E = \mathbb{R}[X]$, $H = \left\{ P \in \mathbb{R}[X] \,\middle|\, P(0) = P(2) \right\}$;
- $E = \mathbb{R}[X]$, $H = \left\{ P \in \mathbb{R}[X] \,\middle|\, P'(0) = 2 \right\}$;
- $E = \mathbb{R}[X]$, $H = \left\{ P \in \mathbb{R}[X] \,\middle|\, A \text{ divise } P \right\}$, où A est un polynôme non nul ;
- $E = \mathscr{C}^0(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, $H = \left\{ f \in E \,\middle|\, \forall x \in \mathbb{R},\ f'(x) + a(x)f(x) = 0 \right\}$ où $a \in E$;
- $E = \mathscr{C}^0(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, $H = \left\{ f \in E \,\middle|\, \forall x \in \mathbb{R},\ f'(x) + a(x)f(x) = b(x) \right\}$ où $a, b \in E$.

PROPOSITION 1.2 — *Soit* E *un* $\mathbb{K}$*-espace vectoriel, et* $(H_i)_{i \in I}$ *une famille de sous-espaces vectoriels. Alors* $\bigcap_{i \in I} H_i$ *est un sous-espace vectoriel de* E.

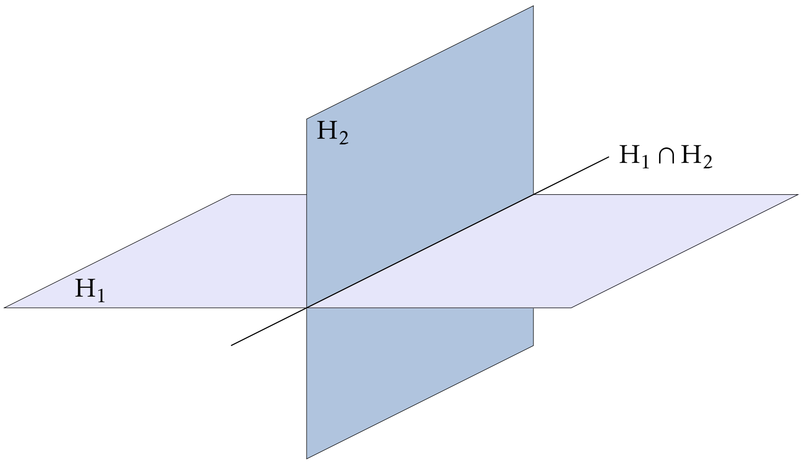

FIGURE 3 – L'intersection de deux sous-espaces vectoriels est un sous-espace vectoriel.

Attention. En revanche, la réunion de deux sous-espaces vectoriels n'est pas, sauf dans le cas trivial où l'un est inclus dans l'autre, un sous-espace vectoriel.

■ Familles génératrices d'un sous-espace vectoriel

Définition. — *Soit* E *un* $\mathbb{K}$*-espace vectoriel, et* $\mathscr{A} = \{a_1, \dots, a_n\}$ *une famille finie de vecteurs de* E *. On appelle* combinaison linéaire *des vecteurs de* $\mathscr{A}$ *tout vecteur* x *pouvant s'écrire sous la forme :*

$$x = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i a_i \qquad \textit{avec } (\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{K}^n.$$

Théorème 1.3 — *L'ensemble des combinaisons linéaires des vecteurs de* $\mathscr{A}$ *forme un sous-espace vectoriel de* E*, que l'on note* $\mathrm{Vect}(\mathscr{A})$ *ou* $\mathrm{Vect}(a_1, \dots, a_n)$*. C'est le sous-espace vectoriel* engendré *par la famille* $\mathscr{A}$*.*

À l'inverse, on dira que la famille $\mathscr{A}$ est une *famille génératrice* du sous-espace vectoriel $\mathrm{Vect}(\mathscr{A})$. Lorsqu'on parle de famille génératrice sans préciser le sous-espace vectoriel dont il est question, c'est qu'il s'agit d'une famille génératrice de l'espace E tout entier.

Remarque. $\mathrm{Vect}(\mathscr{A})$ est le plus petit (au sens de l'inclusion) des sous-espaces vectoriels contenant $\mathscr{A}$.

Remarque. Lorsque $\mathscr{A} = \{a\}$ est composé d'un seul vecteur, on peut écrire $\mathrm{Vect}(a) = \left\{\lambda a \mid \lambda \in \mathbb{K}\right\}$ sous la forme plus concise : $\mathrm{Vect}(a) = \mathbb{K}a$.

1.3 Somme de sous-espaces vectoriels

Lorsque H_1 et H_2 sont deux sous-espaces vectoriels d'un même $\mathbb{K}$-espace vectoriel E, on note

$$\mathrm{H}_1 + \mathrm{H}_2 = \left\{x_1 + x_2 \mid x_1 \in \mathrm{H}_1 \text{ et } x_2 \in \mathrm{H}_2\right\}.$$

Proposition 1.4 — $\mathrm{H}_1 + \mathrm{H}_2$ *est un sous-espace vectoriel. En outre, si* $\mathscr{A}_1$ *et* $\mathscr{A}_2$ *sont des parties génératrices respectivement de* H_1 *et* H_2*,* $\mathscr{A}_1 \cup \mathscr{A}_2$ *est une partie génératrice de* $\mathrm{H}_1 + \mathrm{H}_2$*.*

En d'autres termes, $\mathrm{H}_1 + \mathrm{H}_2$ est le plus petit sous-espace vectoriel (au sens de l'inclusion) contenant H_1 et H_2.

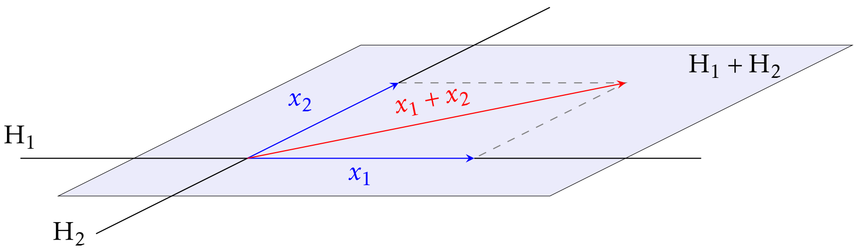

Figure 4 – La somme de deux droites vectorielles est en général un plan.

Tout vecteur x de $\mathrm{H}_1 + \mathrm{H}_2$ peut donc se décomposer sous la forme $x = x_1 + x_2$ avec $x_1 \in \mathrm{H}_1$ et $x_2 \in \mathrm{H}_2$, mais cette décomposition est-elle unique ? Le résultat suivant a pour objet de répondre à cette question.

Proposition 1.5 — *Soient* H_1 *et* H_2 *deux sous-espaces vectoriels de* E*. Il y a équivalence entre :*

$$\begin{array}{ll} (i) & \forall x \in \mathrm{H}_1 + \mathrm{H}_2, \quad \exists!(x_1, x_2) \in \mathrm{H}_1 \times \mathrm{H}_2 \mid x = x_1 + x_2 \\ (ii) & \mathrm{H}_1 \cap \mathrm{H}_2 = \{0_\mathrm{E}\} \end{array}$$

Autrement dit, pour qu'il y ait unicité *de la décomposition, il faut et il suffit que* $\mathrm{H}_1 \cap \mathrm{H}_2 = \{0_\mathrm{E}\}$*. On dit dans ce cas que la somme* $\mathrm{H}_1 + \mathrm{H}_2$ *est* directe*, et on la note :* $\mathrm{H}_1 \oplus \mathrm{H}_2$*.*

Pour finir, notons que de cette notion de somme de deux sous-espaces vectoriels découle la notion de sous-espaces supplémentaires :

Définition. — *Lorsque* H_1 *et* H_2 *vérifient :* $\mathrm{E} = \mathrm{H}_1 \oplus \mathrm{H}_2$*, on dit que ces deux sous-espaces sont* supplémentaires.

Exercice 2. On considère l'espace vectoriel $E = \mathscr{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ des fonctions de $\mathbb{R}$ dans lui-même, ainsi que les deux sous-espaces vectoriels $H_1 = \left\{ f \in E \mid f \text{ est paire} \right\}$ et $H_2 = \left\{ f \in E \mid f \text{ est impaire} \right\}$.
Montrer qu'il s'agit de deux sous-espaces vectoriels supplémentaires.

• L'exemple de la division euclidienne
Considérons l'espace vectoriel $E = \mathbb{K}[X]$ des polynômes à coefficients dans $\mathbb{K}$; il s'agit d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel. Si M est un polynôme non nul, l'ensemble des multiples de M, noté : $M.\mathbb{K}[X] = \left\{ MQ \mid Q \in \mathbb{K}[X] \right\}$, est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{K}[X]$. En posant $n = \deg M$, l'identité de la division euclidienne affirme pour tout $P \in \mathbb{K}[X]$ l'existence d'un *unique* couple $(Q, R) \in \mathbb{K}[X]^2$ tel que :

$$P = MQ + R \quad \text{et} \quad \deg R \leqslant n - 1.$$

Autrement dit, tout polynôme P se décompose de manière unique comme somme d'un polynôme $MQ \in M.\mathbb{K}[X]$ et d'un polynôme $R \in \mathbb{K}_{n-1}[X]$. Ainsi, les sous-espaces vectoriels $M.\mathbb{K}[X]$ et $\mathbb{K}_{n-1}[X]$ sont des sous-espaces vectoriels supplémentaires de $\mathbb{K}[X]$. On peut donc écrire $\mathbb{K}[X] = M.\mathbb{K}[X] \oplus \mathbb{K}_{n-1}[X]$ lorsque $n = \deg M$.

■ Projections vectorielles

Considérons deux sous-espaces vectoriels supplémentaires H_1 et H_2 de E : $E = H_1 \oplus H_2$. Pour tout $x \in E$, il existe un unique couple $(x_1, x_2) \in H_1 \times H_2$ tel que $x = x_1 + x_2$. On définit l'application $p : E \to E$ qui à tout $x \in E$ associe $p(x) = x_1$; il s'agit de la *projection vectorielle* sur H_1 *parallèlement* à H_2.
On a $H_1 = \operatorname{Im} p = \operatorname{Ker}(p - \mathrm{Id}_E)$ et $H_2 = \operatorname{Ker} p$ donc on peut écrire : $E = \operatorname{Ker} p \oplus \operatorname{Ker}(p - \mathrm{Id}_E)$.

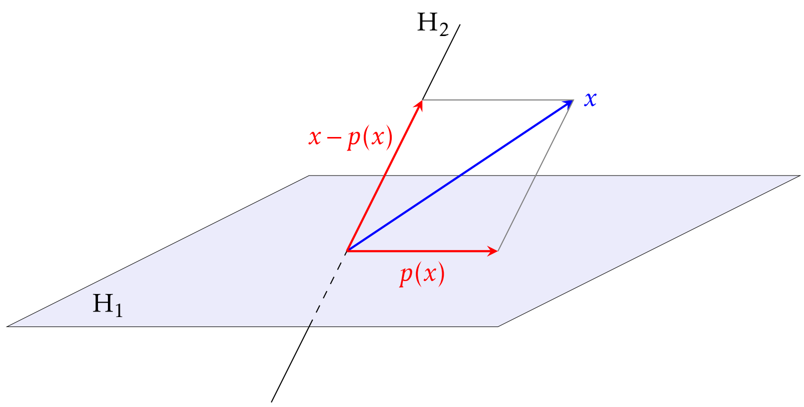

FIGURE 5 – La projection sur H_1 parallèlement à H_2.

Remarque. Si p est la projection vectorielle sur H_1 parallèlement à H_2, alors $\mathrm{Id}_E - p$ est la projection sur H_2 parallèlement à H_1.

THÉORÈME 1.6 — *Un endomorphisme $p \in \mathcal{L}(E)$ est une projection vectorielle si et seulement si $p \circ p = p$. Dans ce cas, p est la projection sur $\operatorname{Im} p = \operatorname{Ker}(p - \mathrm{Id}_E)$ parallèlement à $\operatorname{Ker} p$.*

Exercice 3. On considère deux projections p et q d'un même espace vectoriel E.
Montrer que $\operatorname{Im} p = \operatorname{Im} q$ si et seulement si $p \circ q = q$ et $q \circ p = p$.
Donner une condition analogue pour caractériser l'égalité $\operatorname{Ker} p = \operatorname{Ker} q$.

■ Somme de plusieurs sous-espaces vectoriels

Si $H_1, \ldots, H_p$ sont des sous-espaces vectoriels de E, on peut définir de manière analogue leur somme :

$$H_1 + H_2 + \cdots + H_p = \left\{ x_1 + x_2 + \cdots + x_p \mid x_i \in H_i,\ 0 \leqslant i \leqslant p \right\}.$$

Lorsque la décomposition d'un vecteur $x \in H_1 + H_2 + \cdots + H_p$ est unique, on dira que cette somme est *directe*, et on la notera $H_1 \oplus H_1 \oplus \cdots \oplus H_p$.
Comment caractériser une somme directe ? Pour répondre à cette question, on peut adopter une démarche récursive en écrivant : $x = \underbrace{(x_1 + x_2 + \cdots + x_{p-1})}_{\in H_1 + H_2 + \cdots + H_{p-1}} + \underbrace{x_p}_{\in H_p}$
Ainsi, la somme est directe si et seulement si les sommes $H = H_1 + H_2 + \cdots + H_{p-1}$ et $H + H_p$ sont directes. Cela conduit au résultat suivant :

Théorème 1.7 — *La somme* $H_1 + H_2 + \cdots H_p$ *est directe si et seulement si :*

(i) la somme $H_1 \oplus H_2 \oplus \cdots \oplus H_{p-1}$ *est directe ;*

(ii) $\big(H_1 \oplus H_2 \oplus \cdots \oplus H_{p-1}\big) \cap H_p = \{0_E\}$.

Attention. Il n'existe pas de critère simple pour vérifier qu'une somme de $n \geqslant 3$ sous-espaces vectoriels est directe. Ou bien on justifie l'unicité de la décomposition directement, ou bien on procède récursivement à l'aide du résultat précédent. Par exemple, pour prouver qu'une somme $H_1 + H_2 + H_3$ est directe il faut prouver successivement les deux égalités : $H_1 \cap H_2 = \{0_E\}$ puis $(H_1 \oplus H_2) \cap H_3 = \{0_E\}$.

■ Famille de projecteurs associée à une somme directe

Considérons maintenant une famille $(H_1, \ldots, H_n)$ de sous-espaces vectoriels vérifiant : $E = \bigoplus_{k=1}^{n} H_k$. Tout vecteur $x \in E$ s'écrit de manière unique : $x = \sum_{k=1}^{n} x_k$, avec $x_k \in H_k$. On peut donc définir les endomorphismes $p_k : x \mapsto x_k$ pour $1 \leqslant k \leqslant p$. Ainsi, p_k est la projection vectorielle sur H_k parallèlement à $\bigoplus_{i \neq k} H_i$.

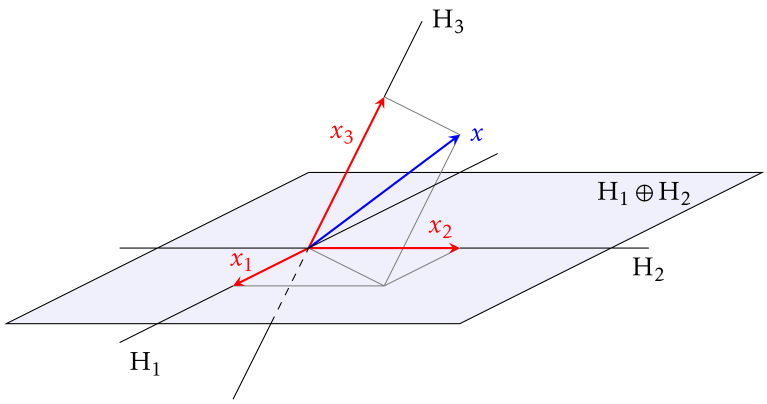

Figure 6 – x_3 est la projection sur H_3 parallèlement à $H_1 \oplus H_2$.

■ Familles libres

Définition. — *Une famille finie* $(a_1, \ldots, a_n)$ *de vecteurs de* E *est dite* libre *lorsque la somme* $\mathbb{K}a_1 + \cdots + \mathbb{K}a_n$ *est directe, c'est à dire lorsque tout vecteur* x *appartenant à cette somme se décompose* de manière unique *sous la forme :*

$$x = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i a_i.$$

On dit encore que les vecteurs $a_1, \ldots, a_n$ *sont* linéairement indépendants. *Une famille qui n'est pas libre est dite* liée.

Il existe essentiellement trois manières de prouver la liberté d'une famille de vecteurs : on peut bien entendu recourir à la définition en justifiant l'unicité de la décomposition, ou utiliser l'un des deux résultats suivants.

Proposition 1.8 — *La famille $(a_1,\dots,a_n)$ est libre si et seulement si elle vérifie la propriété :*

$$(i) \qquad \forall(\lambda_1,\dots,\lambda_n)\in\mathbb{K}^n,\qquad \sum_{i=1}^{n}\lambda_i a_i = 0_E \Longrightarrow \lambda_1=\dots=\lambda_n=0.$$

> **Exercice 4.** Soit E un espace vectoriel, et $f\in\mathcal{L}(E)$. On suppose l'existence d'un vecteur $x\in E$ et d'un entier n tel que $f^{n-1}(x)\neq 0_E$ et $f^n(x)=0_E$. Montrer que la famille $(x, f(x), f^2(x),\dots,f^{n-1}(x))$ est libre.

Le second résultat adopte une approche récursive :

Proposition 1.9 — *Soit $(a_1,\dots,a_n)$ une famille libre, et $a_{n+1}\in E$. Alors $(a_1,\dots,a_{n+1})$ est libre si et seulement si $a_{n+1}\notin \mathrm{Vect}(a_1,\dots,a_n)$.*

Autrement dit, pour prouver que la famille $(a_1,\dots,a_n)$ est libre il suffit de prouver que $(a_1,\dots,a_{n-1})$ est libre puis que a_n n'est pas combinaison linéaire des vecteurs $a_1,\dots,a_{n-1}$.

> **Exercice 5.** On considère n réels ordonnés $\alpha_1<\alpha_2<\dots<\alpha_n$ ainsi que les fonctions $f_i = x\mapsto e^{\alpha_i x}$ de $\mathscr{F}(\mathbb{R},\mathbb{R})$. Montrer que les fonctions $(f_1,f_2,\dots,f_n)$ forment une famille libre.

1.4 Bases d'un espace vectoriel

Définition. — *Une* base $(e_1,\dots,e_p)$ *est une famille libre et génératrice de* E, *c'est à dire lorsque tout vecteur x de* E *se décompose de manière unique sous la forme :*

$$x=\sum_{i=1}^{p}x_i e_i \quad \textit{avec} \quad (x_1,\dots,x_p)\in\mathbb{K}^p.$$

On a donc dans ce cas : $E=\mathbb{K}e_1\oplus\dots\oplus\mathbb{K}e_p$.

Ainsi, le caractère *générateur* de la famille (e) traduit l'*existence* de la décomposition de tout vecteur de E, le caractère *libre*, l'*unicité* de cette décomposition.

Remarque. Les liens entre base et décomposition de l'espace en somme directe sont profonds : si on dispose d'une décomposition de E en somme directe $E=H_1\oplus H_2\oplus\dots\oplus H_p$, on obtient une base de (e) en réunissant des bases de chacun des sous-espaces vectoriels $H_1,H_2,\dots,H_p$.
Plus formellement, si $(e_1,\dots,e_{i_1})$ est une base de H_1, $(e_{i_1+1},\dots,e_{i_2})$ une base de H_2, … , $(e_{i_{p-1}-1},\dots,e_p)$ une base de H_p, alors $(e_1,\dots,e_p)$ est une base de E. Une telle base sera dite *adaptée* à la décomposition en somme directe $E=H_1\oplus\dots\oplus H_p$.

À l'inverse, à partir d'une base $(e_1,\dots,e_p)$ de E on peut obtenir une décomposition en somme directe de E en fractionnant cette base. Si on considère par exemple un entier $k\in[\![i,p-1]\!]$ et si on pose $H_1=\mathrm{Vect}(e_1,\dots,e_k)$ et $H_2=\mathrm{Vect}(e_{k+1},\dots,e_p)$ on obtient une décomposition de E en somme directe de deux sous-espaces supplémentaires $E=H_1\oplus H_2$.

■ Dimension d'un espace vectoriel

Dans le cours de première année a été prouvé un résultat important : *si un espace vectoriel contient une base de cardinal fini, toutes les autres bases ont même cardinal, appelé* dimension *de l'espace vectoriel.*

Les conséquences de ce résultat sont nombreuses, et en particulier :

Proposition 1.10 — *Si* E *est un* $\mathbb{K}$*-espace vectoriel de dimension p, toute famille libre (respectivement génératrice) de cardinal p est une base.*
En outre, toute famille génératrice contient au moins *p éléments, et toute famille libre contient* au plus *p éléments.*

Théorème 1.11 (de la base incomplète) — *Soit (e) une famille libre et (g) une famille génératrice d'un espace vectoriel* E. *Alors il existe une base (b) telle que $(e)\subset(b)\subset(e\cup g)$. Autrement dit, on peut « compléter » une famille libre par certains éléments d'une famille génératrice pour former une base.*

Une application fréquente du théorème de la base incomplète consiste, à partir d'une base $(e_1,\dots,e_k)$ d'un sous-espace vectoriel H de E, à *compléter* celle-ci pour obtenir une base $(e_1,\dots,e_k,e_{k+1},\dots,e_p)$ de E. Une telle base est dite *adaptée* à H.

Proposition 1.12 — *Si* E *et* F *sont deux* $\mathbb{K}$*-espaces vectoriels de dimensions finies, il en est de même de* $E\times F$, *et* $\dim(E\times F)=\dim(E)+\dim(F)$.

Corollaire — *On en déduit par une récurrence immédiate que si* $E_1,E_2,\dots,E_k$ *sont des* $\mathbb{K}$*-espaces vectoriels de dimensions finies, il en est de même de* $E_1\times\cdots\times E_k$, *et* $\dim(E_1\times\cdots\times E_k)=\sum_{i=1}^{k}\dim E_i$.

Proposition 1.13 (Formule de Grassmann) — *Si* H_1 *et* H_2 *sont deux sous-espaces vectoriels d'un* $\mathbb{K}$*-espace vectoriel de dimension finie, alors* $\boxed{\dim(H_1+H_2)=\dim H_1+\dim H_2-\dim(H_1\cap H_2).}$

Il existe une formule qui généralise la formule de Grassmann au cas d'une somme de k sous-espaces vectoriels, mais elle est trop compliquée pour être utilisable en pratique. On se contentera donc du résultat suivant :

Proposition 1.14 — *Si* $H_1,\dots,H_k$ *sont des sous-espaces vectoriels de dimensions finies, il en est de même de leur somme, et* $\dim\Big(\sum_{i=1}^{k}H_i\Big)\leqslant\sum_{i=1}^{k}\dim H_i$, *avec égalité si et seulement si la somme est directe.*

Remarque. Ceci donne un moyen alternatif pour prouver qu'une somme est directe, pour peut qu'on sache calculer la dimension de la somme.

■ Représentation matricielle des vecteurs en dimension finie

• Matrice associée à un vecteur

Étant donnée une base $(e_1,\dots,e_p)$ de E, l'application : $\phi:\mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{K})\to E$ qui à une matrice colonne $X=\begin{pmatrix}x_1\\ \vdots\\ x_p\end{pmatrix}$ associe le vecteur $\sum_{k=1}^{p}x_ke_k$ est un isomorphisme. Pour tout $x\in E$, $X=\phi^{-1}(x)$ est la *matrice des composantes* de x dans la base (e), et sera notée : $X=\mathrm{Mat}_e(x)$.

• Matrice associée à une famille de vecteurs

Si $(x_1,\dots,x_k)$ est une famille de vecteurs de E et $X_1,\dots,X_k$ les matrices colonnes associées à ces vecteurs dans la base (e), on appelle *matrice associée* à la famille $(x_1,\dots,x_k)$ dans la base (e) la matrice $A\in\mathcal{M}_{p,k}(\mathbb{K})$ formée des colonnes $X_1,\dots,X_k$:

$$A=\begin{pmatrix}\uparrow & & \uparrow\\ X_1 & \cdots & X_k\\ \downarrow & & \downarrow\end{pmatrix}=\begin{array}{c|ccc|}
e_1 & & & \\
\vdots & & & \\
e_i & & x_{ij} & \\
\vdots & & & \\
e_p & & & \\
\hline
 & x_1\ \cdots & x_j & \cdots\ x_k
\end{array}$$

i^{e} coefficient de x_j dans la base (e)

Le *rang* de la famille $(x_1,\dots,x_k)$ est la dimension de l'espace vectoriel qu'ils engendrent ; on a donc $\mathrm{rg}(x_1,\dots,x_k)=\mathrm{rg}(X_1,\dots,X_k)=\mathrm{rg}\,A$.

Exemple. Considérons $E=\mathbb{R}^4$ et notons (e) la base canonique. Définissons les quatre vecteurs :

$$a=(1,2,3,4),\quad b=(1,1,1,3),\quad c=(2,1,1,1),\quad d=(3,1,0,3)$$

et posons $H=\mathrm{Vect}(a,b,c,d)$. Quelle est la dimension de H ? Pour répondre à cette question, posons $A=\mathrm{Mat}_{(e)}(a,b,c,d)$ et calculons $\mathrm{rg}(A)$:

```
a = np.array([1, 2, 3 ,4], dtype=float)
b = np.array([1, 1, 1, 3], dtype=float)
c = np.array([2, 1, 1, 1], dtype=float)
d = np.array([3, 1, 0, 3], dtype=float)

A = np.stack([a, b, c, d], axis=1)
```

Vérifions que A est bien la matrice des coordonnées des vecteurs (a, b, c, d) dans la base (e) :

```
In [1]: A
Out[1]: array([[ 1.,  1.,  2.,  3.],
               [ 2.,  1.,  1.,  1.],
               [ 3.,  1.,  1.,  0.],
               [ 4.,  3.,  1.,  3.]])
```

Calculons son rang :

```
In [2]: alg.matrix_rank(A)
Out[2]: 3
```

Ainsi, H est un sous-espace vectoriel de dimension 3, et la famille (a, b, c, d) est une famille génératrice mais n'est pas libre : il ne s'agit pas d'une base.
Comment obtenir une base de H ? La matrice A est la matrice de quatre vecteurs de H ; toute combinaison linéaire de ces vecteurs donne de nouveaux vecteurs de H. Ainsi, *réaliser des opérations élémentaires sur les colonnes de* A *crée de nouvelles familles de vecteurs de* H *sans en modifier le rang*. Nous pouvons donc appliquer la méthode du pivot de Gauss-Jordan, mais en agissant sur les *colonnes* de A.
Réalisons les opérations $C_2 \leftarrow C_2 - C_1$, $C_3 \leftarrow C_3 - 2C_1$, $C_4 \leftarrow C_4 - 3C_1$:

```
A[:, 1] = A[:, 1] - A[:, 0]
A[:, 2] = A[:, 2] - 2 * A[:, 0]
A[:, 3] = A[:, 3] - 3 * A[:, 0]
```

Observons la transformation de la matrice A :

```
In [3]: A
Out[3]: array([[ 1.,  0.,  0.,  0.],
               [ 2., -1., -3., -5.],
               [ 3., -2., -5., -9.],
               [ 4., -1., -7., -9.]])
```

Réalisons maintenant les opérations $C_3 \leftarrow C_3 - 3C_2$ puis $C_4 \leftarrow C_4 - 5C_2$:

```
A[:, 2] = A[:, 2] - 3 * A[:, 1]
A[:, 3] = A[:, 3] - 5 * A[:, 1]
```

On a désormais :

```
In [4]: A
Out[4]: array([[ 1.,  0.,  0.,  0.],
               [ 2., -1.,  0.,  0.],
               [ 3., -2.,  1.,  1.],
               [ 4., -1., -4., -4.]])
```

Puis enfin l'opération $C_4 \leftarrow C_4 - C_3$:

```
A[:, 3] = A[:, 3] - A[:, 2]
```

```
In [5]: A
Out[5]: array([[ 1.,  0.,  0.,  0.],
               [ 2., -1.,  0.,  0.],
               [ 3., -2.,  1.,  0.],
               [ 4., -1., -4.,  0.]])
```

Nous disposons maintenant d'une base de H : la famille (a, b', c') avec $b' = (0, -1, -2, -1)$ et $c' = (0, 0, 1, -4)$.

Exercice 6. On considère l'espace vectoriel $\mathrm{E} = \mathbb{K}_n[\mathrm{X}]$ des polynômes de degré inférieur ou égal à n, ainsi que la famille de vecteurs $(\mathrm{P}_0, \ldots, \mathrm{P}_n)$ définie par : $\mathrm{P}_k = \mathrm{X}^k(1-\mathrm{X})^{n-k}$. Quelle forme particulière prend la matrice associée à la famille (P) dans la base canonique ? En déduire que (P) est une base de E.

Par un raisonnement analogue, prouver que toute famille de polynômes $(\mathrm{Q}_0, \ldots, \mathrm{Q}_n)$ vérifiant $\deg \mathrm{Q}_k = k$, $0 \leqslant k \leqslant n$, est une base de E.

• Matrice de passage entre deux bases

Considérons un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E de dimension finie p, et (e) et (e') deux bases. Nous qualifierons la base (e) d'*ancienne base*, et (e') de *nouvelle base*.
Étant donné un vecteur $x \in \mathrm{E}$, on souhaite exprimer ses nouvelles coordonnées $\mathrm{X}' = \mathrm{Mat}_{(e')}(x)$ en fonction de ses anciennes coordonnées $\mathrm{X} = \mathrm{Mat}_{(e)}(x)$.
On suppose connaître l'expression des vecteurs de la nouvelle base (e') dans l'ancienne base (e) :

$$\forall j \in [\![1, p]\!], \quad e'_j = \sum_{i=1}^{p} \lambda_{ij} e_i$$

ce qui revient à considérer la matrice $\mathrm{P} = \mathrm{Mat}_e(e'_1, \ldots, e'_p) = (\lambda_{ij}) \in \mathcal{M}_p(\mathbb{K})$. On dit que P est la *matrice de passage* de (e) vers (e').

Théorème 1.15 (formule de changement de base) — *La matrice* $\mathrm{P} = \mathrm{Mat}_e(e')$ *est une matrice inversible, et la formule de changement de base s'exprime sous la forme :* $\boxed{\mathrm{X}' = \mathrm{P}^{-1}\mathrm{X}.}$

Remarque. De l'égalité $\mathrm{X} = \mathrm{P}\mathrm{X}' = (\mathrm{P}^{-1})^{-1}\mathrm{X}'$ il résulte que P^{-1} est la matrice de passage de (e') vers (e).

2. Applications linéaires

2.1 Rappels

Une application linéaire est une application entre deux espaces vectoriels qui respecte l'addition des vecteurs et la multiplication scalaire, ou, en d'autre termes, qui préserve les combinaisons linéaires. On adoptera donc la définition suivante :

Définition. — *Soit* E *et* F *deux* $\mathbb{K}$*-espaces vectoriels, et* $u : \mathrm{E} \to \mathrm{F}$ *une application. On dit que* u *est* linéaire *lorsque :* $\forall (x, y) \in \mathrm{E}^2$, $\forall \lambda \in \mathbb{K}$, $u(\lambda x + y) = \lambda u(x) + u(y)$.

On note $\mathcal{L}(\mathrm{E}, \mathrm{F})$ le $\mathbb{K}$-espace vectoriel des applications linéaires de E vers F ; si E et F sont de dimensions finies, la dimension de cet espace vectoriel est égal à $\dim \mathrm{E} \times \dim \mathrm{F}$.
Enfin, lorsque F = E on notera $\mathcal{L}(\mathrm{E}) = \mathcal{L}(\mathrm{E}, \mathrm{E})$, et les éléments de $\mathcal{L}(\mathrm{E})$ seront appelés des *endomorphismes*.

■ Matrice associée à une application linéaire

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension p, et F un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension n. On note $(e_1, \ldots, e_p)$ une base de E, et $(f_1, \ldots, f_n)$ une base de F.
À une application linéaire $u \in \mathcal{L}(\mathrm{E}, \mathrm{F})$ on associe la matrice $\mathrm{A} = \mathrm{Mat}_f\big(u(e_1), \ldots, u(e_p)\big)$ (la matrice des composantes des vecteurs $u(e_1), \ldots, u(e_p)$ dans la base (f)), matrice que l'on note $\mathrm{Mat}_{e,f}(u)$. On a donc :

coordonnées de $u(e_j)$ dans la base (f)

$$\mathrm{A} = \mathrm{Mat}_{e,f}(u) = \begin{array}{cc} \begin{array}{c} f_1 \\ \vdots \\ f_n \end{array} & \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1p} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nj} & \cdots & a_{np} \end{pmatrix} \\ & \begin{array}{ccccc} u(e_1) & \cdots & u(e_j) & \cdots & u(e_p) \end{array} \end{array}$$

Remarque. L'application $\phi : \mathcal{L}(E,F) \to \mathcal{M}_{np}(\mathbb{K})$ définie par $\phi(u) = \mathrm{Mat}_{e,f}(u)$ établit un isomorphisme entre $\mathcal{L}(E,F)$ et $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$; c'est ce résultat qui permet de justifier sans peine que $\dim \mathcal{L}(E,F) = np = \dim E \times \dim F$.

L'application d'une application linéaire à un vecteur est lié au produit matriciel par le résultat suivant :

Théorème 2.1 — *Si $x \in E$, on pose $X = \mathrm{Mat}_e(x)$ et $Y = \mathrm{Mat}_f\big(u(x)\big)$. Alors $Y = AX$.*

• Formule de changement de base pour les applications linéaires

Soient (e') et (f') deux nouvelles bases, respectivement de E et F. On note $P \in \mathcal{GL}_p(\mathbb{K})$ la matrice de passage de (e) vers (e') et $Q \in \mathcal{GL}_n(\mathbb{K})$ la matrice de passage de (f) vers (f').
On note $A' = (a'_{ij}) = \mathrm{Mat}_{e',f'}(u)$ la matrice associée à l'application linéaire u dans les nouvelles bases (e') et (f').
On souhaite exprimer A' en fonction de A, matrice associée à u dans les anciennes bases (e) et (f).

La matrice associée à $u(x)$ est égale à AX dans la base (f), et à $A'X'$ dans la base (f'). Des formules de changement de base pour les vecteurs on déduit que : $A'X' = Q^{-1}AX$. Or $X' = P^{-1}X$, donc : $A'P^{-1}X = Q^{-1}AX$. Ceci étant vrai pour tout $X \in \mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{K})$, on en déduit que $A'P^{-1} = Q^{-1}A$, soit : $\boxed{A' = Q^{-1}AP.}$

Exemple. On pose $E = \mathbb{R}^4$, $F = \mathbb{R}^3$, on note (e) et (f) les bases canoniques respectivement de E et F, et on considère l'application linéaire $u \in \mathcal{L}(E,F)$ définie par $\mathrm{Mat}_{e,f}(u) = \begin{pmatrix} 4 & 5 & -7 & 7 \\ 2 & 1 & -1 & 3 \\ 1 & -1 & 2 & 1 \end{pmatrix} = A$. On souhaite obtenir la matrice $A' = \mathrm{Mat}_{e',f'}(u)$ relative aux changements de bases définis par :

$$\begin{cases} e'_1 = e_1 \\ e'_2 = e_2 \\ e'_3 = 4e_1 + e_2 - 3e_4 \\ e'_4 = -7e_1 + e_3 + 5e_4 \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} f'_1 = 4f_1 + 2f_2 + f_3 \\ f'_2 = 5f_1 + f_2 - f_3 \\ f'_3 = f_3 \end{cases}$$

Définissons la matrice A :

```
A = np.array([ [4, 5, -7, 7],
               [2, 1, -1, 3],
               [1, -1, 2, 1] ], dtype=float)
```

puis les vecteurs des nouvelles bases (e') et (f'), ainsi que les matrices de passage :

```
e1 = np.array([1, 0, 0, 0], dtype=float)
e2 = np.array([0, 1, 0, 0], dtype=float)
e3 = np.array([4, 1, 0, -3], dtype=float)
e4 = np.array([-7, 0, 1, 5], dtype=float)

P = np.stack([e1, e2, e3, e4], axis=1)

f1 = np.array([4, 2, 1], dtype=float)
f2 = np.array([5, 1, -1], dtype=float)
f3 = np.array([0, 0, 1], dtype=float)

Q = np.stack([f1, f2, f3], axis=1)
```

Calculons alors la matrice A' :

```
In [1]: alg.inv(Q).dot(A).dot(P)
Out[1]:
array([[  1.00000000e+00,   1.11022302e-16,   0.00000000e+00,   8.88178420e-16],
       [  0.00000000e+00,   1.00000000e+00,   7.77156117e-16,  -1.33226763e-15],
       [  0.00000000e+00,   0.00000000e+00,   0.00000000e+00,   0.00000000e+00]])
```

Ce n'est pas très lisible à cause de la représentation imparfaite des nombres réels par le type flottant [1]. Arrondissons plutôt le résultat à deux décimales :

1. Voir votre cours d'informatique de tronc commun de première année.

```
In [2]: np.round(alg.inv(Q).dot(A).dot(P), 2)
Out[2]: array([[ 1.,  0.,  0.,  0.],
               [ 0.,  1.,  0.,  0.],
               [ 0.,  0.,  0.,  0.]])
```

Ainsi, $A' = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \mathrm{Mat}_{e',f'}(u)$. On peut constater que les bases (e') et (f') n'ont pas été choisies au hasard : on a $u(e'_1) = f'_1$, $u(e'_2) = f'_2$ et $u(e'_3) = u(e'_4) = 0_F$. On peut vérifier ces égalités en effectuant les calculs dans les anciennes bases (e) et (f) :

```
In [3]: A.dot(e1)
Out[3]: array([ 4.,  2.,  1.])

In [4]: A.dot(e2)
Out[4]: array([ 5.,  1., -1.])

In [5]: A.dot(e3)
Out[5]: array([ 0.,  0.,  0.])

In [6]: A.dot(e4)
Out[6]: array([ 0.,  0.,  0.])
```

Le théorème 2.4 permettra d'expliquer la façon dont ont été choisies les bases (e') et (f').

• Formule de changement de base pour les endomorphismes

Il s'agit d'un cas particulier du précédent, avec : $F = E$, $(f) = (e)$, $(f') = (e')$. On obtient : $\boxed{A' = P^{-1}AP.}$
Deux matrices A et A′ liées par une relation de ce type sont dites *semblables*. Garder toujours à l'esprit que deux matrices semblables sont deux matrices qui peuvent être associées au même endomorphisme, mais exprimées dans des bases différentes.

Exercice 7. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ une matrice vérifiant $A^n = 0$ et $A^{n-1} \neq 0$. À l'aide de l'exercice 4 montrer que la matrice A est semblable à la matrice

$$A' = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ & & & \ddots & 0 \\ & & & \ddots & 1 \\ 0 & \cdots & & \cdots & 0 \end{pmatrix}$$

En déduire que les matrices $A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & -3 \\ 5 & 1 & -5 \\ -3 & 4 & 0 \end{pmatrix}$ et $T = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ sont semblables, puis calculer explicitement une matrice P vérifiant $A = PTP^{-1}$.

■ Trace d'un endomorphisme

Définition. — *On appelle trace d'une matrice carrée* $A = (a_{ij}) \in \mathcal{M}_p(\mathbb{K})$ *le scalaire :* $\mathrm{tr}\,A = \sum_{i=1}^{p} a_{ii}$, *c'est à dire la somme des éléments diagonaux de cette matrice.*

On définit ainsi une forme linéaire sur l'espace $\mathcal{M}_p(\mathbb{K})$ des matrices carrées d'ordre p, autrement dit une application linéaire de $\mathcal{M}_p(\mathbb{K})$ dans $\mathbb{K}$. Cette forme linéaire va pouvoir à son tour être définie sur l'espace $\mathcal{L}(E)$ des endomorphismes d'un espace vectoriel E de dimension finie grâce au résultat suivant, et surtout son corollaire :

Proposition 2.2 — *Si* $(A, B) \in \mathcal{M}_p(\mathbb{K})^2$ *on a* $\boxed{\mathrm{tr}(AB) = \mathrm{tr}(BA).}$

Corollaire — *Si* $A \in \mathcal{M}_p(\mathbb{K})$ *et* $P \in \mathcal{GL}_p(\mathbb{K})$ *alors* $\boxed{\mathrm{tr}(P^{-1}AP) = \mathrm{tr}\,A.}$

Du corollaire précédent on déduit que si $u \in \mathcal{L}(\mathrm{E})$ et $\mathrm{A} = \mathrm{Mat}_e(u)$, alors $\operatorname{tr}\mathrm{A}$ ne dépend pas du choix de la base (e). On peut donc définir la *trace* de u par l'intermédiaire de la trace d'une matrice associée à A dans une base quelconque :

Définition. — *Si* E *est un* $\mathbb{K}$*-espace vectoriel de dimension finie et* $u \in \mathcal{L}(\mathrm{E})$ *un endomorphisme de* E*, on appelle* trace *de* u *la trace de la matrice* $\mathrm{Mat}_{(e)}(u)$*, où* (e) *est une base* quelconque *de* E.

L'application $u \mapsto \operatorname{tr} u$ est une forme linéaire sur $\mathcal{L}(\mathrm{E})$, autrement dit une application linéaire de $\mathcal{L}(\mathrm{E})$ dans $\mathbb{K}$. De la proposition 2.2 il résulte :

Corollaire — *Si* u *et* v *sont deux endomorphismes d'un même* $\mathbb{K}$*-espace vectoriel* E*, alors* $\operatorname{tr}(u \circ v) = \operatorname{tr}(v \circ u)$.

• Base canonique de $\mathcal{M}_{np}(\mathbb{K})$

Il s'agit bien entendu de la base $(\mathrm{E}_{ij})_{\substack{1\leqslant i\leqslant n\\ 1\leqslant j\leqslant p}}$ formée des matrices dont tous les coefficients sont nuls sauf un, égal à 1 :

$$\mathrm{E}_{ij} = \begin{array}{c c} \begin{pmatrix} 0 & \cdots & & 0 \\ \vdots & & & \vdots \\ & & 1 & \\ \vdots & & & \vdots \\ 0 & \cdots & & 0 \end{pmatrix} & \begin{array}{c} \\ \\ i \\ \\ \\ \end{array} \\ \quad\quad\quad j & \end{array}$$

Il est bon de connaître la formule donnant le produit de deux matrices de cette forme ; c'est le résultat suivant :

$$\boxed{\mathrm{E}_{ij}\mathrm{E}_{k\ell} = \delta_{j,k}\mathrm{E}_{i\ell}.}$$

où $\delta j, k$ désigne le *symbole de Kronecker* : $\delta_{j,k} = \begin{cases} 1 & \text{si } j = k \\ 0 & \text{si } j \neq k \end{cases}$.

Exercice 8. En utilisant la base canonique de $\mathcal{M}_p(\mathbb{K})$, prouver que toute forme linéaire $\phi : \mathcal{M}_p(\mathbb{K}) \to \mathbb{K}$ vérifiant : $\forall (\mathrm{A}, \mathrm{B}) \in \mathcal{M}_p(\mathbb{K})^2$, $\phi(\mathrm{AB}) = \phi(\mathrm{BA})$ est proportionnelle à la trace.

2.2 Image et noyau d'une application linéaire

Nous allons maintenant nous intéresser aux liens qui existent entre sous-espaces vectoriels et applications linéaires.

Proposition 2.3 — *Soit* $u : \mathrm{E} \to \mathrm{F}$ *une application linéaire,* H_1 *et* H_2 *des sous-espaces vectoriels respectivement de* E *et* F*. Alors* $u(\mathrm{H}_1)$ *et* $u^{-1}(\mathrm{H}_2)$ *sont respectivement des sous-espaces vectoriels de* F *et de* E.

Attention. Attention à la notation $u^{-1}(\mathrm{H}_2)$, qui pourrait faire croire à tort que u est supposée bijective. Il n'en est rien, il s'agit de la notion d'*image réciproque* définie par :

$$u^{-1}(\mathrm{H}_2) = \left\{x \in \mathrm{E} \;\middle|\; u(x) \in \mathrm{H}_2\right\}.$$

Exemples. En appliquant cette propriété aux sous-espaces vectoriels $\mathrm{H}_1 = \mathrm{E}$ et $\mathrm{H}_2 = \{0_\mathrm{F}\}$, on définit *image* et *noyau* d'une application linéaire :

$\operatorname{Im} u = u(\mathrm{E}) = \left\{y \in \mathrm{F} \;\middle|\; \exists x \in \mathrm{E} \text{ tel que } u(x) = y\right\}$ est un sous-espace vectoriel de F (l'*image* de u) ;

$\operatorname{Ker} u = u^{-1}\big(\{0_\mathrm{F}\}\big) = \left\{x \in \mathrm{E} \;\middle|\; u(x) = 0_\mathrm{F}\right\}$ est un sous-espace vectoriel de E (le *noyau* de u).

Rappelons que ces deux sous-espaces vectoriels permettent de caractériser l'injectivité et la surjectivité d'une application linéaire :

u est injective si et seulement si $\operatorname{Ker} u = \{0_\mathrm{E}\}$, et u est surjective si et seulement si $\operatorname{Im} u = \mathrm{F}$.

Remarque. Ces notions de noyau et d'image interviennent dans la résolution d'un système linéaire du type : $u(x) = y$, d'inconnue $x \in \mathrm{E}$:

cette équation possède une solution si et seulement si $y \in \operatorname{Im} u$, et dans ce cas, l'ensemble des solutions prend la forme $\left\{x_0 + h \,\middle|\, h \in \operatorname{Ker} u\right\}$, où x_0 est une solution particulière quelconque.

Définition. — *Lorsque u est bijective, l'application u^{-1} est aussi linéaire. On dit alors que u est un* isomorphisme, *et que* E *et* F *sont des espaces vectoriels* isomorphes.

Lorsqu'ils sont de dimensions finies, deux espaces isomorphes sont de même dimension.

Nous allons maintenant aborder un théorème très important, qui lie image et supplémentaire du noyau. Il s'agit du résultat suivant :

Théorème 2.4 — *Soit $u \in \mathcal{L}(\mathrm{E},\mathrm{F})$ une application linéaire, et* H *un supplémentaire de* $\operatorname{Ker} u$ *dans* E. *Alors la restriction de u à* H *réalise un isomorphisme entre* H *et* $\operatorname{Im} u$.

En d'autres termes, l'application $\boxed{u_{\mathrm{H}} : \begin{pmatrix} \mathrm{H} & \longrightarrow & \operatorname{Im} u \\ x & \longmapsto & u(x) \end{pmatrix} \text{ est un isomorphisme.}}$

Remarque. Lorsque E et F sont de dimensions finies, considérons une base $(e_1 \ldots, e_r)$ de H et une base $(e_{r+1}, \ldots, e_p)$ de $\operatorname{Ker} u$. On obtient ainsi une base $(e_1, \ldots, e_r, e_{r+1}, \ldots, e_p)$ de E. Le théorème précédent nous permet d'affirmer que $\big(f_1 = u(e_1), \ldots, f_r = u(e_r)\big)$ est une base de $\operatorname{Im} u$, que l'on peut compléter pour former une base $(f_1, \ldots, f_r, f_{r+1}, \ldots, f_n)$ de F. La matrice associée à u pour les bases (e) et (f) est alors la matrice suivante :

$$\begin{pmatrix} 1 & & 0 & \cdots & 0 \\ & \ddots & \vdots & & \vdots \\ & 1 & \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & & \vdots \\ \vdots & & & & \vdots \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \end{pmatrix} = \left(\begin{array}{c|c} \mathrm{I}_r & \mathrm{O} \\ \hline \mathrm{O} & \mathrm{O} \end{array}\right)$$

Notons que l'exemple donné en page 11 illustre ce résultat.

Corollaire (Théorème du rang) — *Soit* E *un* $\mathbb{K}$*-espace vectoriel de dimension finie,* F *un* $\mathbb{K}$*-espace vectoriel, et* $u \in \mathcal{L}(\mathrm{E},\mathrm{F})$ *une application linéaire. Alors* $\operatorname{Ker} u$ *et* $\operatorname{Im} u$ *sont de dimension finie, et :*

$$\boxed{\dim \mathrm{E} = \dim(\operatorname{Ker} u) + \dim(\operatorname{Im} u).}$$

Corollaire — *Si* F *est de dimension finie et si* $\dim \mathrm{E} = \dim \mathrm{F}$, *alors :*

$$u \text{ injective} \iff u \text{ surjective} \iff u \text{ bijective.}$$

En particulier, pour les endomorphismes en dimension finie, injectivité, surjectivité et bijectivité sont des notions équivalentes.

Exercice 9. Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie, et $(u,v) \in \mathcal{L}(\mathrm{E})^2$. Montrer, en appliquant le théorème du rang à la *restriction* de u à $\operatorname{Im} v$, que : $\operatorname{rg}(u \circ v) \geqslant \operatorname{rg} u + \operatorname{rg} v - \dim \mathrm{E}$.
En déduire que $\dim(\operatorname{Ker} u^2) \leqslant 2\dim(\operatorname{Ker} u)$.

■ Application à l'interpolation de Lagrange

En analyse numérique, l'interpolation est une opération mathématique consistant à déterminer une fonction à partir de la donnée d'un nombre fini de valeurs, et vérifiant éventuellement certaines propriétés supplémentaires.
Dans le cas particulier de l'interpolation de Lagrange on considère un entier $n \in \mathbb{N}$, $x_0, \ldots, x_n$ des scalaires *deux à deux distincts*, et $y_0, \ldots, y_n$ des scalaires quelconques. Le problème consiste à déterminer le ou les polynômes $\mathrm{P} \in \mathbb{K}[\mathrm{X}]$ (s'ils existent) vérifiant : $\forall k \in [\![0,n]\!]$, $\mathrm{P}(x_k) = y_k$, et si possible de degré minimal.

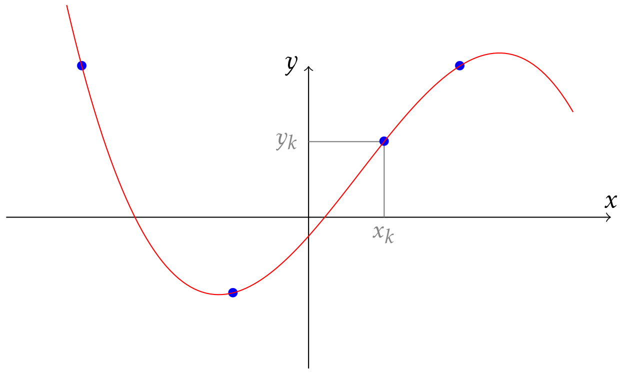

FIGURE 7 – Un polynôme de degré trois passant par quatre points d'interpolation.

Considérons l'application linéaire $u : \mathbb{K}[X] \to \mathbb{K}^{n+1}$ définie par :

$$\forall P \in \mathbb{K}[X], \quad u(P) = \big(P(x_0), \ldots, P(x_n)\big).$$

Si on note $y = (y_0, \ldots, y_n)$, il s'agit de résoudre le système linéaire : $u(P) = y$, d'inconnue $P \in \mathbb{K}[X]$.

LEMME — *Le noyau de u est constitué des multiples du polynôme* $N = \prod_{i=0}^{n} (X - x_i)$.

Sachant que $\mathbb{K}_n[X]$ est un supplémentaire de $N.\mathbb{K}[X]$ (principe de la division euclidienne par N), on en déduit que u réalise un isomorphisme entre $\mathbb{K}_n[X]$ et l'image de u. Mais alors $\dim(\operatorname{Im} u) = n+1$, et puisque $\operatorname{Im} u \subset \mathbb{K}^{n+1}$ on a $\operatorname{Im} u = \mathbb{K}^{n+1}$. Autrement dit, u est un endomorphisme surjectif, et :

THÉORÈME 2.5 — *Il existe un unique polynôme P de $\mathbb{K}_n[X]$ tel que : $\forall k \in [\![0, n]\!]$, $P(x_n) = y_n$.*

Nous venons donc de démontrer que le problème de l'interpolation de Lagrange possède une unique solution P_L de degré inférieur ou égal à N ; les autres solutions s'écrivent : $P = P_L + N.Q$, où Q est un polynôme quelconque. Mais tout ceci ne nous dit pas comment calculer P_L. Pour ce faire, nous allons introduire une nouvelle base de $\mathbb{K}_n[X]$, la base des *polynômes d'interpolation de Lagrange*, dans laquelle l'expression de P_L sera très simple.

THÉORÈME 2.6 — *Posons pour tout entier $k \in [\![0, n]\!]$,* $\boxed{L_k = \prod_{i \neq k} \frac{X - x_i}{x_k - x_i}.}$ *Ces polynômes forment une base de $\mathbb{K}_n[X]$ pour laquelle : $\forall P \in \mathbb{K}_n[X]$,* $\boxed{P = \sum_{k=0}^{n} P(x_k) L_k.}$

Les polynômes L_k sont les *polynômes d'interpolation de Lagrange* aux points $x_0, \ldots, x_n$.

Il devient alors évident que le polynôme P_L s'écrit : $P_L = \sum_{k=0}^{n} y_k L_k$.

Exemple. Déterminons numériquement le polynôme d'interpolation de degré minimal répondant aux conditions d'interpolation : $P(-3) = 2$, $P(-1) = -1$, $P(1) = 1$, $P(2) = 2$ (c'est celui représenté figure 7).
Définissons déjà les points d'interpolation ainsi que les valeurs qui leur sont associées :

```
x = [-3, -1, 1, 2]
y = [2, -1, 1, 2]
```

Ici, il est utile de définir une fonction pour calculer les différents polynômes de Lagrange :

```python
def lagrange(x, i):
    P = 1
    for j in range(len(x)):
        if j != i:
            P = P * Polynomial([-x[j], 1]) / (x[i] - x[j])
    return P
```

Le script qui suit permet de résoudre le problème d'interpolation posé :

```python
P = 0
for i in range(len(x)):
    P = P + y[i] * lagrange(x, i)
```

```
In [1]: P.coef
Out[1]: array([-0.25 ,  1.125,  0.25 , -0.125])
```

Nous avons $P = -\frac{1}{8}X^3 + \frac{1}{4}X^2 + \frac{9}{8}X - \frac{1}{4}$.

Remarque. Le script qui permet de réaliser la figure 7 est peu ou prou le suivant :

```python
import matplotlib.pyplot as plt

plt.plot(x, y, 'o')

abscisses = np.linspace(-3.2, 3.5, 128)
ordonnées = [P(t) for t in abscisses]

plt.plot(abscisses, ordonnées)
```

2.3 Sous-espaces stables

Matrices définies par blocs

Considérons une matrice $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ ainsi que deux entiers $i \in [\![1, n-1]\!]$ et $j \in [\![1, p-1]\!]$. Divisons les lignes de A en deux ensembles : les lignes dont les indices sont compris entre 1 et i et celles dont les indices sont compris entre $i+1$ et n. Faisons de même avec les colonnes en distinguant celles dont les indices sont compris entre 1 et j de celles dont les indices sont compris entre $j+1$ et p.
En procédant de la sorte, on divise la matrice A en quatre blocs :

$$A = \begin{array}{cc} \left(\begin{array}{c|c} A_1 & A_2 \\ \hline A_3 & A_4 \end{array}\right) & \begin{array}{l} \updownarrow i \\ \updownarrow n-i \end{array} \\ \begin{array}{cc} \overleftrightarrow{\;j\;} & \overleftrightarrow{p-j} \end{array} & \end{array} \qquad \text{avec} \quad A_1 \in \mathcal{M}_{i,j}(\mathbb{K}),\ A_2 \in \mathcal{M}_{i,p-j}(\mathbb{K}),\ A_3 \in \mathcal{M}_{n-i,j}(\mathbb{K}),\ A_4 \in \mathcal{M}_{n-i,p-j}(\mathbb{K}).$$

Une telle matrice sera dite *définie par blocs*.

Pour peu que le découpage soit identique, la définition par bloc de deux matrices est évidemment compatible avec l'addition :

$$\text{si } A' = \left(\begin{array}{c|c} A'_1 & A'_2 \\ \hline A'_3 & A'_4 \end{array}\right) \quad \text{alors} \quad \lambda A + A' = \left(\begin{array}{c|c} \lambda A_1 + A'_1 & \lambda A_2 + A'_2 \\ \hline \lambda A_3 + A'_3 & \lambda A_4 + A'_4 \end{array}\right)$$

mais le fait le plus remarquable est que le découpage par blocs est *compatible avec la multiplication*, pour peu que les découpages conduisent à des produits « licites » de matrices :

$$\text{si } \mathrm{B} = \begin{array}{cc} \left(\begin{array}{c|c} \mathrm{B}_1 & \mathrm{B}_2 \\ \hline \mathrm{B}_3 & \mathrm{B}_4 \end{array}\right) & \begin{array}{l} j \\ p-j \end{array} \\ \begin{array}{cc} k & q-k \end{array} & \end{array} \in \mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{K}) \quad \text{alors} \quad \mathrm{AB} = \begin{array}{cc} \left(\begin{array}{c|c} \mathrm{A}_1\mathrm{B}_1 + \mathrm{A}_2\mathrm{B}_3 & \mathrm{A}_1\mathrm{B}_2 + \mathrm{A}_2\mathrm{B}_4 \\ \hline \mathrm{A}_3\mathrm{B}_1 + \mathrm{A}_4\mathrm{B}_3 & \mathrm{A}_1\mathrm{B}_2 + \mathrm{A}_2\mathrm{B}_4 \end{array}\right) & \begin{array}{l} i \\ n-i \end{array} \\ \begin{array}{cc} k & q-k \end{array} & \end{array} \in \mathcal{M}_{n,q}(\mathbb{K})$$

Autrement dit, les matrices définies par blocs se multiplient entre elles tout comme si les blocs étaient des scalaires, à condition que chaque multiplication corresponde à une multiplication « légale » de matrices (en ce qui concerne les dimensions).

Ces propriétés s'étendent par récurrence au cas d'un découpage des lignes et/ou des colonnes en un nombre arbitraire de subdivisions.

Définition. — *Une matrice carrée* $\mathrm{A} \in \mathcal{M}_p(\mathbb{K})$ *est dite* diagonale par bloc *lorsqu'il existe une subdivision de* $[\![1,p]\!]$ *telle que :*

$$\mathrm{A} = \begin{array}{cc} \begin{pmatrix} \mathrm{A}_{11} & & & \\ & \mathrm{A}_{22} & & \\ & & \ddots & \\ & & & \mathrm{A}_{kk} \end{pmatrix} & \begin{array}{l} i_1 \\ i_2 \\ \vdots \\ i_k \end{array} \\ \begin{array}{cccc} i_1 & i_2 & \cdots & i_k \end{array} & \end{array}$$

(Tous les blocs sont nuls hormis les blocs diagonaux, qui sont tous carrés.)
Une matrice carrée $\mathrm{A} \in \mathcal{M}_p(\mathbb{K})$ *est dite* triangulaire par bloc *lorsqu'il existe une subdivision de* $[\![1,p]\!]$ *telle que :*

$$\mathrm{A} = \begin{array}{cc} \begin{pmatrix} \mathrm{A}_{11} & \mathrm{A}_{12} & \cdots & \mathrm{A}_{1k} \\ & \mathrm{A}_{22} & \cdots & \mathrm{A}_{2k} \\ & & \ddots & \vdots \\ & & & \mathrm{A}_{kk} \end{pmatrix} & \begin{array}{l} i_1 \\ i_2 \\ \vdots \\ i_k \end{array} \\ \begin{array}{cccc} i_1 & i_2 & \cdots & i_k \end{array} & \end{array}$$

(Tous les blocs diagonaux sont carrés, et les blocs situés sous la diagonale sont nuls.)

■ Sous-espaces stables

Définition. — *Soit* H *un sous-espace vectoriel de* E, *et* $u \in \mathcal{L}(\mathrm{E})$ *un endomorphisme. On dit que* H *est* stable *par* u *lorsque* $u(\mathrm{H}) \subset \mathrm{H}$.

Considérons une base adaptée à un sous-espace vectoriel H, c'est-à-dire construite à partir d'une base $(e_1,\ldots,e_k)$ de H puis complétée pour former une base $(e_1,\ldots,e_k,e_{k+1},\ldots,e_p)$ de E. Alors H est stable par u si et seulement si la matrice associée à u dans cette base (e) est de la forme :

$$\begin{array}{cc} \begin{array}{r} k \\ p-k \end{array} & \left(\begin{array}{c|c} \mathrm{A} & \mathrm{C} \\ \hline \mathrm{O} & \mathrm{D} \end{array}\right) \\ & \begin{array}{cc} k & p-k \end{array} \end{array}$$

En effet, nous avons : $\forall j \in [\![1,k]\!]$, $u(e_j) \in \mathrm{H} = \mathrm{Vect}(e_1,\ldots,e_k)$.

Lorsque H est stable par u, la restriction de u à H définit donc un endomorphisme u_{H} de H dont la matrice dans la base $(e_1,\ldots,e_k)$ est la matrice A.

Remarque. Dans une base $(e'_1,\ldots,e'_p)$ de E pour laquelle ce sont les vecteurs $(e'_{p-k+1},\ldots,e'_p)$ qui forment une base de H, la matrice d'un endomorphisme stabilisant H est de la forme :

$$\begin{pmatrix} \mathrm{D} & \mathrm{O} \\ \mathrm{C} & \mathrm{A} \end{pmatrix}$$

Exemple. $\mathrm{Ker}\, u$ et $\mathrm{Im}\, u$ sont des sous-espaces vectoriels stables de u. En effet, dans une base adaptée à $\mathrm{Ker}\, u$, la matrice associée à u prend la forme :

$$\begin{pmatrix} \mathrm{O} & \mathrm{C} \\ \mathrm{O} & \mathrm{D} \end{pmatrix}$$

et dans une base adaptée à $\mathrm{Im}\, u$ la matrice associée à u prend la forme :

$$\begin{pmatrix} \mathrm{A} & \mathrm{C} \\ \mathrm{O} & \mathrm{O} \end{pmatrix}$$

Exercice 10. On considère deux endomorphismes u et v qui commutent ($u \circ v = v \circ u$). Montrer que $\mathrm{Im}\, v$ et $\mathrm{Ker}\, v$ sont stables par u.

• Décomposition de l'espace en somme de sous-espaces stables

Considérons enfin une famille $(\mathrm{H}_1,\ldots,\mathrm{H}_k)$ de sous-espaces vectoriels telle que : $\mathrm{E} = \mathrm{H}_1 \oplus \mathrm{H}_2 \oplus \cdots \oplus \mathrm{H}_k$, et une base $(e_1,\ldots,e_p)$ adaptée à cette décomposition. Alors un endomorphisme $u \in \mathcal{L}(\mathrm{E})$ stabilise *chacun* de ces sous-espaces vectoriels si et seulement si la matrice associée à u dans cette base est diagonale par bloc :

$$\mathrm{Mat}_{(e)}(u) = \begin{pmatrix} \boxed{\mathrm{A}_1} & & & \\ & \boxed{\mathrm{A}_2} & & \\ & & \ddots & \\ & & & \boxed{\mathrm{A}_k} \end{pmatrix} = \mathrm{A}$$

Remarque. Avec les notations ci-dessus, on a : $\mathrm{rg}\,\mathrm{A} = \displaystyle\sum_{j=1}^{k} \mathrm{rg}\,\mathrm{A}_j$ et $\mathrm{tr}\,\mathrm{A} = \displaystyle\sum_{j=1}^{k} \mathrm{tr}\,\mathrm{A}_j$.

En outre, si v est un endomorphisme ayant aussi $\mathrm{H}_1, \mathrm{H}_2, \ldots, \mathrm{H}_k$ comme sous-espaces stables, et si $\mathrm{B} = \mathrm{Mat}_{(e)}(v)$, alors :

$$\mathrm{B} = \begin{pmatrix} \boxed{\mathrm{B}_1} & & \\ & \boxed{\mathrm{B}_2} & \\ & & \ddots & \\ & & & \boxed{\mathrm{B}_k} \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \mathrm{AB} = \begin{pmatrix} \boxed{\mathrm{A}_1\mathrm{B}_1} & & \\ & \boxed{\mathrm{A}_2\mathrm{B}_2} & \\ & & \ddots & \\ & & & \boxed{\mathrm{A}_k\mathrm{B}_k} \end{pmatrix}$$

En particulier, on notera que pour tout entier $n \in \mathbb{N}$,

$$\mathrm{A}^n = \begin{pmatrix} \boxed{\mathrm{A}_1^n} & & \\ & \boxed{\mathrm{A}_2^n} & \\ & & \ddots & \\ & & & \boxed{\mathrm{A}_k^n} \end{pmatrix}$$

2.4 Endomorphismes nilpotents (notion hors-programme)

Définition. — *Un endomorphisme $u \in \mathcal{L}(\mathrm{E})$ est dit* nilpotent *lorsqu'il existe un entier $p \in \mathbb{N}^*$ tel que $u^p = 0$.*
*Le plus petit entier p vérifiant cette condition, autrement dit tel que $u^p = 0$ et $u^{p-1} \neq 0$, est appelé l'*indice de nilpotence *de u.*

Théorème 2.7 — *Soit u un endomorphisme nilpotent d'indice p, et $x \in \mathrm{E}$ un vecteur vérifiant $u^{p-1}(x) \neq 0_\mathrm{E}$. Alors la famille $\big(x, u(x), \dots, u^{p-1}(x)\big)$ est libre.*

Corollaire — *Lorsque l'espace vectoriel est de dimension n, l'indice d'un endomorphisme nilpotent est inférieur ou égal à n.*

Intéressons nous maintenant au cas où l'indice de nilpotence de u est égal à la dimension n de E. Dans ce cas, quel que soit $x \in \mathrm{E}$ vérifiant $u^{n-1}(x) \neq 0_\mathrm{E}$, la famille $\big(x, u(x), \dots, u^{n-1}(x)\big)$ est libre et de cardinal n donc constitue une base de E, base dans laquelle la matrice associée à u est de la forme :

$$\mathrm{J} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ 1 & \ddots & \ddots & & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Exercice 11. Montrer que J et J^T sont deux matrices semblables.

L'exercice 34 généralise cette étude au cas d'un indice de nilpotence quelconque.

3. Déterminant

Il a été admis en première année l'existence d'une unique application $\det : \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \to \mathbb{K}$ vérifiant les trois propriétés suivantes :

- det est linéaire vis-à-vis de chacune des colonnes de sa variable ;
- det est anti-symétrique vis-à-vis des colonnes de sa variable ;
- $\det(\mathrm{I}_n) = 1$.

Les deux premières propriétés font référence à la possibilité d'interpréter une matrice comme une famille de n vecteurs colonnes ; or c'est précisément ce que nous faisons lorsque nous écrivons la matrice $\mathrm{Mat}_{(e)}(x_1,\dots,x_n)$ d'une famille $(x_1,\dots,x_n)$ de n vecteurs dans une base $(e_1,\dots,e_n)$ d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E. Dès lors il est possible de définir le déterminant d'une famille de n vecteurs $(x_1,\dots,x_n)$ *relativement à une base* $(e_1,\dots,e_n)$ de E en posant :

$$\det_{(e)}(x_1,\dots,x_n) \stackrel{\text{def}}{=} \det\Big(\mathrm{Mat}_{(e)}(x_1,\dots,x_n)\Big).$$

Considérons maintenant un endomorphisme $u \in \mathcal{L}(\mathrm{E})$; pour une base (e) donnée lui est associée la matrice $\mathrm{Mat}_{(e)}(u) = \mathrm{Mat}_{(e)}(u(e_1),\dots,u(e_n))$. Dès lors il est possible de définir le déterminant de l'endomorphisme u en posant :

$$\det u \stackrel{\text{def}}{=} \det\Big(\mathrm{Mat}_{(e)}(u)\Big) = \det_{(e)}(u(e_1),\dots,u(e_n)).$$

Cette définition laisse entendre que le déterminant d'un endomorphisme dépend de la base par laquelle on réalise sa traduction matricielle, *mais il n'en est rien* ! Ce fait remarquable est une conséquence du point *(ii)* de la proposition 3.1.

En conclusion, on dispose de trois déterminants :

- le déterminant d'une matrice ;
- le déterminant *relativement à une base* d'une famille de n vecteurs dans un espace de dimension n ;
- le déterminant d'un endomorphisme en dimension finie.

3.1 Propriétés du déterminant

Rappelons sans en refaire la preuve quelques propriétés du déterminant d'une matrice :

Proposition 3.1 — *Si* A *et* B *désignent deux matrices de* $\mathrm{Mat}_n(\mathbb{K})$ *et* $\lambda \in \mathbb{K}$ *un scalaire, alors :*

(i) $\det(\lambda \mathrm{A}) = \lambda^n \det \mathrm{A}$;

(ii) $\det(\mathrm{AB}) = \det \mathrm{A} \det \mathrm{B}$;

(iii) si A *possède deux colonnes égales alors* $\det \mathrm{A} = 0$;

(iv) si les colonnes de A *forment une famille liée alors* $\det \mathrm{A} = 0$;

(v) A *est inversible si et seulement si* $\det \mathrm{A} \neq 0$, *et dans ce cas,* $\det(\mathrm{A}^{-1}) = \dfrac{1}{\det \mathrm{A}}$;

(vi) $\det \mathrm{A}^{\mathrm{T}} = \det \mathrm{A}$.

La propriété *(v)* est essentielle et donne tout son sens à l'intérêt du déterminant, car de cette propriété résulte immédiatement les deux conséquences suivantes :

Corollaire (caractérisation des bases) — *Soit* E *un* $\mathbb{K}$*-espace vectoriel de dimension finie, et* $(e_1,\dots,e_n)$ *une base de* E. *Alors une famille* $(x_1,\dots,x_n)$ *de n vecteurs est une base si et seulement si* $\det_{(e)}(x_1,\dots,x_n) \neq 0$.

Corollaire (caractérisation des automorphismes) — *Soit* E *un espace vectoriel de dimension finie, et* $u \in \mathcal{L}(\mathrm{E})$. *Alors u est un automorphisme si et seulement si* $\det u \neq 0$.

Remarque. La propriété *(vi)* montre que le déterminant d'une matrice vérifie les mêmes propriétés vis-à-vis des colonnes que vis-à-vis des lignes.

Exercice 12. Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension n, (e) une base de E, et $(x_1,\dots,x_n)$ une famille de n vecteurs de E. On pose : $\forall k \in [\![1,n]\!],\ y_k = \sum\limits_{i\neq k} x_i$.

Quelle relation existe-t-il entre $\det_{(e)}(y_1,\dots,y_n)$ et $\det_{(e)}(x_1,\dots,x_n)$? On traitera le cas $n = 3$ avant de traiter le cas général.

On posera $s = \sum\limits_{i=1}^{n} x_i$ et on développera le déterminant en utilisant la linéarité vis-à-vis de chacune de ses variables.

3.2 Techniques de calcul d'un déterminant

Le calcul pratique d'un déterminant passe souvent par une successions d'opérations élémentaires ; le résultat suivant précise comment celles-ci modifient le déterminant.

Proposition 3.2 — *Soit* $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, *et* A_1, A_2, A_3 *les trois matrices obtenues respectivement à partir de* A *par les trois opérations élémentaires sur les colonnes* $C_i \leftarrow C_i + \lambda C_j$, $C_i \leftrightarrow C_j$, $C_i \leftarrow \lambda C_i$. *Alors :*

$$\det A_1 = \det A \qquad \det A_2 = -\det A \qquad \det A_3 = \lambda \det A.$$

Remarque. Le point *(vi)* de la proposition étend ce résultat aux opérations élémentaires sur les lignes.

Les opérations élémentaires conduisent à une matrice triangulaire ; le résultat suivant permet alors de terminer le calcul du déterminant :

Proposition 3.3 — *Soit* $A = (a_{ij})$ *une matrice triangulaire ; alors* $\det A = \prod_{k=1}^{n} a_{kk}$.

Exercice 13. Calculer le déterminant d'ordre n suivant :

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & \cdots & n \\ 2 & 2 & 3 & & \vdots \\ 3 & 3 & 3 & & \vdots \\ \vdots & & & \ddots & \vdots \\ n & \cdots & \cdots & \cdots & n \end{vmatrix}$$

L'autre technique de calcul utilisée consiste à développer le déterminant par rapport à une des ses lignes ou colonne. pour cela, on appelle *mineur* de rang (i,j) d'une matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ le déterminant obtenu en supprimant la i^e ligne et la j^e colonne de la matrice A. Les formules que l'on utilise sont alors :

développement suivant la k^e ligne :

$$\det A = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{k+j} a_{kj} \Delta_{kj}$$

développement suivant la k^e colonne :

$$\det A = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+k} a_{ik} \Delta_{ik}$$

Exercice 14. Développer le déterminant ci-dessous suivant la dernière colonne pour en déduire une expression de d_n en fonction de d_{n-1}, et en déduire d_n.

$$d_n = \begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ -1 & 2 & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & -1 & 2 \end{vmatrix}$$

■ Matrices tri-diagonales

On appelle matrice *tri-diagonale* toute matrice $A = (a_{ij}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ vérifiant : $|i-j| \geqslant \Longrightarrow a_{ij} = 0$. En d'autre termes, tous les termes qui ne sont pas situés sur l'une des trois diagonales centrales sont nuls. La technique de calcul des déterminants tri-diagonaux est toujours la même : on développe suivant la dernière ligne puis suivant la dernière colonne. Pour simplifier le calcul, nous allons nous cantonner au cas où les termes sur chacune des trois diagonales centrales sont constants ; autrement dit, nous allons calculer les déterminants :

$$d_n = \begin{vmatrix} a & b & & \\ c & \ddots & \ddots & \\ & \ddots & \ddots & b \\ & & c & a \end{vmatrix} \updownarrow n$$

Le développement de ce déterminant suivant sa dernière colonne donne :

$$\forall n \geqslant 2, \qquad d_n = ad_{n-1} - b \begin{vmatrix} a & b & & & \\ c & \ddots & \ddots & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & c & a & b \\ & & & & c \end{vmatrix} \updownarrow n-1$$

et en développant ensuite suivant la dernière ligne : $d_n = ad_{n-1} - bcd_{n-2}$, récurrence linéaire d'ordre 2 qui permet de calculer le déterminant.

Exercice 15. Montrer que le déterminant d'ordre n suivant est égal à $\cos(n\theta)$:

$$d_n = \begin{vmatrix} \cos\theta & 1 & & \\ 1 & 2\cos\theta & \ddots & \\ & \ddots & \ddots & 1 \\ & & 1 & 2\cos\theta \end{vmatrix}$$

3.3 Déterminant d'une matrice définie par blocs

Il n'existe pas de formule simple pour calculer le déterminant d'une matrice définie par blocs, à l'exception du cas des matrices triangulaires par blocs. Commençons par le cas d'une matrice définie par quatre blocs :

Proposition 3.4 — *Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, et $k \in [\![1, n-1]\!]$ un entier induisant la même partition des lignes et des colonnes en deux sous-ensembles $[\![1, k]\!]$ et $[\![k+1, n]\!]$. On suppose de plus le bloc correspondant aux indices de lignes $[\![k+1, n]\!]$ et aux indices de colonnes $[\![1, k]\!]$ (autrement dit le bloc en bas à gauche) nul. Alors :*

$$A = \begin{pmatrix} A_1 & A_2 \\ O & A_4 \end{pmatrix} \Longrightarrow \det A = \det(A_1) \times \det(A_4).$$

On en déduit aisément par récurrence le :

Corollaire — *Le déterminant d'une matrice triangulaire par bloc est égal au produit des déterminants des blocs diagonaux :*

$$\begin{vmatrix} A_{11} & A_{12} & \cdots & A_{1k} \\ & A_{22} & \cdots & A_{2k} \\ & & \ddots & \vdots \\ & & & A_{kk} \end{vmatrix} = \det A_{11} \times \det A_{22} \times \cdots \times \det A_{kk}.$$

Exercice 16. Soient A, B, C, D quatre matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. On suppose que C et D commutent et que D est inversible.
Calculer le produit $\left(\begin{array}{c|c} A & B \\ \hline C & D \end{array}\right)\left(\begin{array}{c|c} D & O \\ \hline -C & D^{-1} \end{array}\right)$ et en déduire : $\det\left(\begin{array}{c|c} A & B \\ \hline C & D \end{array}\right) = \det(AD - BC)$.

3.4 Déterminant de Vandermonde

Revenons un instant sur le problème (résolu à la section 2.2) de l'interpolation de Lagrange : étant donnés n scalaires deux à deux distincts $x_1, \dots, x_n$ et n scalaires quelconques $y_1, \dots, y_n$, trouver l'unique polynôme $P \in \mathbb{K}_{n-1}[X]$ vérifiant : $\forall k \in [\![0, n-1]\!]$, $P(x_k) = y_k$, et adoptons un démarche naïve : posons $P = \sum_{k=0}^{n-1} a_k X^k$, et considérons le système d'inconnues $a_0, a_1, \dots, a_{n-1}$:

$$\begin{cases} a_0 + a_1 x_1 + a_2 x_1^2 + \cdots + a_{n-1} x_1^{n-1} = y_1 \\ a_0 + a_1 x_2 + a_2 x_2^2 + \cdots + a_{n-1} x_2^{n-1} = y_2 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_0 + a_1 x_n + a_2 x_n^2 + \cdots + a_{n-1} x_n^{n-1} = y_n \end{cases}$$

Il s'agit d'un système linéaire (bien noter que les inconnues sont $a_0, \dots, a_{n-1}$) dont la forme matricielle est :

$$\begin{pmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 & \cdots & x_1^{n-1} \\ 1 & x_2 & x_2^2 & \cdots & x_2^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & x_n & x_{n-1}^2 & \cdots & x_{n-1}^{n-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ \vdots \\ a_{n-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$$

La matrice carrée d'ordre n qui intervient dans ce système s'appelle la matrice de Vandermonde ; son déterminant est appelé le *déterminant de Vandermonde* :

$$V(x_1, x_2, \dots, x_n) = \begin{vmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 & \cdots & x_1^{n-1} \\ 1 & x_2 & x_2^2 & \cdots & x_2^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & x_n & x_{n-1}^2 & \cdots & x_{n-1}^{n-1} \end{vmatrix}$$

La résolution du problème de Lagrange nous permet d'ors et déjà d'affirmer que ce déterminant est non nul lorsque les x_i sont deux à deux distincts ; il est néanmoins possible de calculer explicitement ce déterminant :

Théorème 3.5 — $V(x_1, x_2, \dots, x_n) = \prod_{i=1}^{n} \prod_{j=i+1}^{n} (x_j - x_i)$, *formule qu'on retiendra sous la forme plus concise :*

$$\boxed{V(x_1, x_2, \dots, x_n) = \prod_{i<j} (x_j - x_i).}$$

4. Exercices

Sous-espaces vectoriels

Exercice 17 Soit $E = \mathscr{D}^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ le $\mathbb{R}$-espace vectoriel des fonctions dérivables de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, et $H = \left\{ f \in E \;\middle|\; f(0) = f'(0) = 0 \right\}$. Montrer que H est un sous-espace vectoriel de E, et en trouver un supplémentaire.

Projections vectorielles

Exercice 18 Soient E et F deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels, et $u \in \mathcal{L}(E,F)$ et $v \in \mathcal{L}(F,E)$ tels que $u \circ v = \mathrm{Id}_F$. Montrer que $v \circ u$ est une projection vectorielle, puis que $\operatorname{Ker}(v \circ u) = \operatorname{Ker} u$ et $\operatorname{Im}(v \circ u) = \operatorname{Im} v$.

Exercice 19 Soient p et q deux projections vectorielles d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E. Montrer que $p+q$ est une projection vectorielle si et seulement si $p \circ q = 0$ et $q \circ p = 0$. Montrer que dans ce cas, on a $\operatorname{Ker}(p+q) = \operatorname{Ker} p \cap \operatorname{Ker} q$ et $\operatorname{Im}(p+q) = \operatorname{Im} p \oplus \operatorname{Im} q$.

Familles génératrices, familles libres, bases

Exercice 20 On considère une famille libre $(u_1, u_2, \dots, u_n)$ d'un espace vectoriel E, et on définit la famille de vecteurs $(v_1, \dots, v_n)$ en posant : $\forall k \in [\![1, n-1]\!]$, $v_k = u_k + u_{k+1}$ et $v_n = u_n + u_1$. Étudier la liberté de la famille $(v_1, \dots, v_n)$.

Applications linéaires

Exercice 21 Soient E et F deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels de dimensions finies, et G un sous-espace vectoriel de E.

a) On pose $\mathcal{A} = \left\{ u \in \mathcal{L}(E,F) \,\middle|\, G \subset \operatorname{Ker} u \right\}$. Montrer que $\mathcal{A}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{L}(E,F)$.

b) On considère une base (e) de E adaptée à G, et une base (f) de F, puis on pose $\mathcal{A}' = \left\{ \mathrm{Mat}_{e,f}(u) \,\middle|\, u \in \mathcal{A} \right\}$. Justifier que $\mathcal{A}$ et $\mathcal{A}'$ sont des espaces vectoriels isomorphes.

c) Quelle est la dimension de $\mathcal{A}'$ (observer la forme des éléments de $\mathcal{A}'$) ? En déduire la dimension de $\mathcal{A}$.

Exercice 22 Soient E et F deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels de dimensions finies, et $u \in \mathcal{L}(E,F)$. On pose :

$$\mathcal{A} = \left\{ v \in \mathcal{L}(F,E) \,\middle|\, u \circ v \circ u = 0 \right\}.$$

a) Montrer que $\mathscr{A}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{L}(F,E)$.

b) Justifier l'existence d'une base (e) de E et d'une base (f) de F telles que $\mathrm{Mat}_{e,f}(u) = \left(\begin{array}{c|c} I_r & O \\ \hline O & O \end{array}\right)$.

c) On note M la matrice définie ci-dessus. Pour $v \in \mathcal{L}(F,E)$, on pose $N = \mathrm{Mat}_{f,e}(v)$. À quelle condition, portant sur N, a-t-on $v \in \mathcal{A}$? En déduire la dimension de $\mathcal{A}$.

Exercice 23 Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie n, et $u \in \mathcal{L}(E)$. On suppose l'existence de $x_0 \in E$ tel que la famille $(e) = \left(x_0, u(x_0), \cdots, u^{n-1}(x_0)\right)$ soit une base de E.
Soit $v \in \mathcal{L}(E)$ tel que $u \circ v = v \circ u$. Montrer l'existence de scalaires $(a_0, \dots, a_{n-1}) \in \mathbb{K}^n$ tels que

$$v = a_0 \mathrm{Id}_E + a_1 u + a_2 u^2 + \cdots a_{n-1} u^{n-1}.$$

Indication. On pourra considérer la décomposition du vecteur $v(x_0)$ dans la base (e).

Trace d'un endomorphisme

Exercice 24 Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie, et $u \in \mathcal{L}(E)$ tel que $\operatorname{rg} u = 1$. Montrer que $u^2 = (\operatorname{tr} u)u$, puis que pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, $u^k = (\operatorname{tr} u)^{k-1} u$.

Exercice 25 Soit u une forme linéaire sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ (c'est-à-dire une application linéaire de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ vers $\mathbb{K}$). Montrer l'existence d'une matrice A telle que pour tout $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, $u(M) = \operatorname{tr}(AM)$.

Image et noyau d'une application linéaire

Exercice 26 Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel, et $u \in \mathcal{L}(E)$.

Montrer que $\operatorname{Ker} u \cap \operatorname{Im} u = \{0\} \iff \operatorname{Ker} u = \operatorname{Ker} u^2$ et $E = \operatorname{Ker} u + \operatorname{Im} u \iff \operatorname{Im} u = \operatorname{Im} u^2$.

Exercice 27 Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie, et $u \in \mathcal{L}(E)$. Pour tout $p \in \mathbb{N}$ on pose $I_p = \mathrm{Im}(u^p)$ et $K_p = \mathrm{Ker}(u^p)$.

Montrer que les suites $(I_p)_{p\in\mathbb{N}}$ et $(K_p)_{p\in\mathbb{N}}$ sont respectivement décroissante et croissante (au sens de l'inclusion), puis que celles-ci sont simultanément stationnaires.
On note r le rang à partir duquel les deux suites sont stationnaires. Montrer que $E = I_r \oplus K_r$.

Exercice 28 Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie, et H_1 et H_2 deux sous-espaces vectoriels de E. Montrer que $\dim H_1 + \dim H_2 = \dim E$ si et seulement s'il existe un endomorphisme $u \in \mathcal{L}(E)$ tel que $H_1 = \mathrm{Ker}\, u$ et $H_2 = \mathrm{Im}\, u$.

Exercice 29 Soit E un espace vectoriel de dimension finie, et $u \in \mathcal{L}(E)$ tel que $\mathrm{rg}\, u = n-1$. Montrer que $u^{n-1} \neq 0$.

Indication. Appliquer le théorème du rang à l'application linéaire $\left(\begin{array}{ccc} \mathrm{Im}(u^k) & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & u(x) \end{array}\right)$ pour $k \in [\![0, n-2]\!]$.

Sous-espaces stables

Exercice 30 Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, et $B = \begin{pmatrix} \boxed{O_n} & \boxed{A} \\ \boxed{I_n} & \boxed{O_n} \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{2n}(\mathbb{K})$.

Montrer que B est inversible si et seulement si A l'est, et calculer B^p pour tout $p \in \mathbb{N}$.

Exercice 31 Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$. Calculer A^n pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Exercice 32 Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel, et $p \in \mathcal{L}(E)$ une projection vectorielle. Montrer que $u \in \mathcal{L}(E)$ commute avec p si et seulement si $\mathrm{Ker}\, p$ et $\mathrm{Im}\, p$ sont stables par u.

Exercice 33 Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie, et $u \in \mathcal{L}(E)$ vérifiant $(u - \alpha \mathrm{Id}_E) \circ (u - \beta \mathrm{Id}_E) = 0$, avec $(\alpha, \beta) \in \mathbb{K}^2$ et $\alpha \neq \beta$. On pose $H_1 = \mathrm{Ker}(u - \alpha \mathrm{Id}_E)$ et $H_2 = \mathrm{Ker}(u - \beta \mathrm{Id}_E)$.

Montrer que H_1 et H_2 sont des sous-espaces vectoriels stables par u, puis que $E = H_1 \oplus H_2$.
Que dire de la matrice associée à u dans une base adaptée à cette décomposition ? Montrer que $u = \alpha p + \beta(\mathrm{Id}_E - p)$, où p est la projection vectorielle sur H_1 parallèlement à H_2.

Exercice 34 Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie, et $u \in \mathcal{L}(E)$ un endomorphisme nilpotent (c'est à dire qu'il existe un entier $p \in \mathbb{N}^*$ tel que $u^p = 0$).

Établir que pour tout $k \in [\![1, p]\!]$, il existe un sous-espace vectoriel F_k de E tel que $\mathrm{Ker}(u^k) = \mathrm{Ker}(u^{k-1}) \oplus F_k$.
Établir que $E = F_1 \oplus \cdots \oplus F_p$, puis justifier que la matrice associée à u dans une base adaptée à cette décomposition est triangulaire à coefficients diagonaux nuls.

Déterminants

Exercice 35 Soit $(a) = (a_1, \ldots, a_n)$ et $(b) = (b_1, \ldots, b_n)$ deux n-uplets de $\mathbb{K}^n$, et $M = (m_{ij})$ la matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ définie par $m_{ij} = \begin{cases} a_i + b_i & \text{si } i = j \\ a_i & \text{sinon} \end{cases}$. En utilisant la linéarité du déterminant vis-à-vis de chacune de ses colonnes, calculer $\det M$.

Exercice 36 Calculer le déterminant d'ordre n : $\begin{vmatrix} 0 & 1 & \cdots & 1 \\ -1 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 1 \\ -1 & \cdots & -1 & 0 \end{vmatrix}$.

Exercice 37 Calculer le déterminant d'ordre $n+1$: $\begin{vmatrix} a_0 & -1 & 0 & \cdots & 0 \\ a_1 & x & -1 & \ddots & \vdots \\ a_2 & 0 & x & \ddots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & -1 \\ a_n & 0 & \cdots & 0 & x \end{vmatrix}$.