Chapitre 12

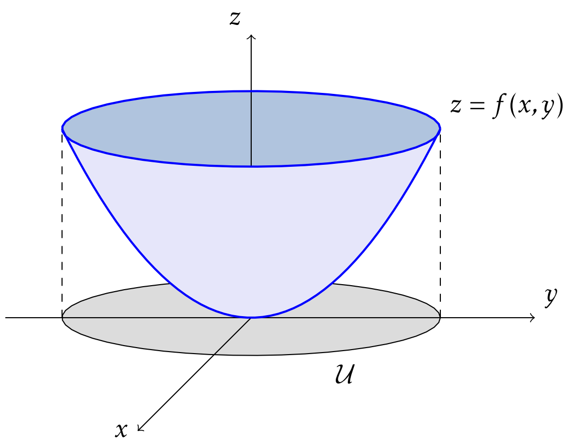
Calcul différentiel

Jusqu'à présent, nous nous sommes cantonnés à l'étude de fonctions d'*une variable*, d'abord à valeurs réelles ou complexes en première année, puis à valeurs vectorielles (dans $\mathbb{R}^n$) en seconde année. Ces fonctions étaient systématiquement définies sur un intervalle I de $\mathbb{R}$. Nous allons maintenant nous intéresser aux fonctions de *plusieurs variables*, c'est à dire définies sur une partie $\mathcal{U}$ de $\mathbb{R}^p$, à valeurs dans $\mathbb{R}^n$:

$$f : \left(\begin{array}{rcl} \mathcal{U} \subset \mathbb{R}^p & \longrightarrow & \mathbb{R}^p \\ x = (x_1, \ldots, x_p) & \longmapsto & f(x) = \big(f_1(x_1, \ldots, x_p), \ldots, f_n(x_1, \ldots, x_p)\big) \end{array} \right)$$

Dans ce cours, nous aurons l'occasion, comme pour les fonctions vectorielles, de montrer que l'étude d'une telle fonction se ramène à celle de ses fonctions coordonnées $f_1, \ldots, f_n$ et ainsi nous ramener à l'étude des fonctions à valeurs réelles (autrement dit prendre $n = 1$). Pour des raisons pratiques, nos exemples se cantonnerons le plus souvent à des fonctions à deux ou trois variables ($p = 2$ ou 3).
Ainsi, lorsque l'on a $p = 2$ et $n = 1$, le graphe $z = f(x, y)$ d'une telle fonction est une nappe paramétrée que l'on peut visualiser et ainsi fournir un support à une interprétation géométrique :

Exemple. $\mathcal{U} = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; x^2 + y^2 \leqslant 1\right\}$, et $f : \left(\begin{array}{rcl} \mathcal{U} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x, y) & \longmapsto & x^2 + y^2 \end{array} \right)$



D'un point de vue historique, on peut noter que la notion de fonction à plusieurs variables apparaît très tôt en physique, où l'on étudie souvent des quantités dépendants de plusieurs paramètres. Citons par exemple :

- en mécanique des fluides, la *pression* p est un champ [1] scalaire qui associe à un point du fluide la pression en ce point ; mathématiquement, cela correspond à une application d'une partie $\mathcal{U}$ de $\mathbb{R}^3$ (ou de $\mathbb{R}^4$, si on tient compte du temps) dans $\mathbb{R}$:

$$p : \left(\begin{array}{rcl} \mathcal{U} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ \mathrm{M} = (x, y, z) & \longmapsto & p(\mathrm{M}) \end{array} \right)$$

- en électromagnétisme, la *densité de courant* $\vec{\jmath}$ est un champ vectoriel qui associe à tout point de l'espace considéré un vecteur qui décrit le courant électrique qui circule à l'échelle locale ; mathématiquement, cela correspond à une application d'une partie $\mathcal{U}$ de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}^3$:

$$\vec{\jmath} : \left(\begin{array}{rcl} \mathcal{U} & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\ \mathrm{M} = (x, y, z) & \longmapsto & \vec{\jmath}(\mathrm{M}) \end{array} \right)$$

Mais avant de débuter l'étude de telles fonctions, il faut définir et étudier les propriétés que nous allons exiger des ensembles de définition de ces fonctions. Cette première partie du cours constitue un complément au chapitre consacré aux espaces vectoriels normés.

1. en mathématiques, un champ est une application qui associe aux points de l'espace une valeur, scalaire ou vectorielle.

1. Topologie d'un espace vectoriel normé

Dans toute cette partie, nous considérons l'espace vectoriel $E = \mathbb{R}^p$ muni d'une norme notée $\|\cdot\|$ et nous admettrons que les résultats ici énoncés ne dépendent pas du choix de cette norme.

1.1 Ouverts et fermés

Un ensemble *ouvert*, aussi appelé une partie ouverte ou, plus fréquemment, un ouvert, est, de manière informelle, une partie $\mathcal{O}$ de E qui possède la propriété suivante : si a appartient à cet ensemble, $\mathcal{O}$ contiendra aussi tous les points suffisamment proches de a. Quant aux fermés, même si nous ne les définirons pas ainsi, nous verrons qu'il s'agit des parties complémentaires des ouverts.
C'est la notion de boule, que nous avons déjà rencontrée, qui permet de définir la notion de *proximité*, ou encore de *voisinage*, dont nous avons besoin pour définir les ouverts. On en rappelle la définition :

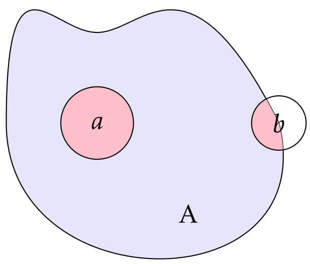
Définition. — *Soit $a \in E$ et $r > 0$. On appelle* boule ouverte *de centre a de rayon r l'ensemble :*

$$\mathring{B}(a,r) = \left\{x \in E \,\middle|\, d(x,a) < r\right\} = \left\{x \in E \,\middle|\, \|x-a\| < r\right\}.$$

On appelle boule fermée *de centre a de rayon r l'ensemble :*

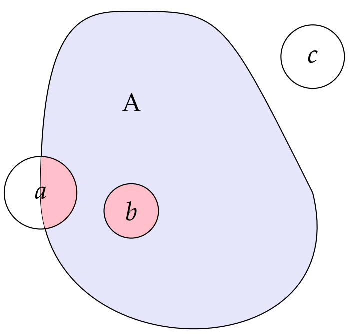
$$\overline{B}(a,r) = \left\{x \in E \,\middle|\, d(x,a) \leqslant r\right\} = \left\{x \in E \,\middle|\, \|x-a\| \leqslant r\right\}.$$

Définition. — *Soit A une partie de E, et a un point de A. Lorsque A contient une boule (ouverte ou fermée) centrée en a, on dit que a est* intérieur *à A.*



Le point a est intérieur à A, mais pas le point b : quel que soit le rayon de la boule centrée en b, celle-ci ne sera pas incluse dans A.

Définition. — *Un élément $a \in E$ est dit* adhérent *à une partie A de E lorsque toute boule (ouverte ou fermée) centrée en a contient au moins un point de A : $\forall r > 0$, $B(a,r) \cap A \neq \varnothing$.*



Les points a et b sont adhérents à A, mais pas le point c.

Remarque. Tout point de A est bien entendu adhérent à A.

Théorème 1.1 (caractérisation séquentielle) — *Un point $a \in E$ est adhérent à A si et seulement s'il existe une suite (u_n) d'éléments de A qui converge vers a.*

Exercice 1. Soit A une partie de E et $x \in E$. On pose $d(x,A) = \inf\left\{\|x-a\| \,\middle|\, a \in A\right\}$. Montrer que x est adhérent à A si et seulement si $d(x,A) = 0$.

■ Intérieur, adhérence et frontière

Définition. — *Lorsque* A *est une partie quelconque de* E*, on appelle*

- intérieur *de* A *l'ensemble* $\mathring{A}$ *des points intérieurs à* A ;
- adhérence *de* A *l'ensemble* $\overline{A}$ *des points adhérents à* A ;
- frontière *de* A *l'ensemble* $\mathrm{Fr}(A) = \overline{A} \setminus \mathring{A}$.

Exemple. Si A est une boule (ouverte ou fermée) de centre a de rayon r, $\mathring{A}$ est la boule ouverte $\mathring{B}(a,r)$, $\overline{A}$ est la boule fermée $\overline{B}(a,r)$, Fr(A) est la sphère $S(a,r)$.

Exemples. L'adhérence de $\mathbb{Q}$ dans $\mathbb{R}$ est égal à $\mathbb{R}$ car tout nombre réel est limite d'une suite de nombres rationnels. L'intérieur de $\mathbb{Q}$ dans $\mathbb{R}$ est égal à l'ensemble vide car toute boule de rayon $r > 0$ contient des irrationnels.

■ Ouverts et fermés

Définition. — *Une partie* $\mathcal{O}$ *de* E *est dite* ouverte *lorsque tous ses points sont intérieurs, c'est à dire :*

$$\forall x \in \mathcal{O}, \quad \exists r > 0 \;\middle|\; B(x,r) \subset \mathcal{O}.$$

Exemples.

- Les intervalles ouverts sont des ouverts de $\mathbb{R}$;
- toute boule ouverte est un ouvert ;
- $\varnothing$ et E sont des ouverts ;
- l'intersection ou la réunion de deux ouverts est un ouvert.

Définition. — *Une partie* $\mathcal{F}$ *de* E *est dite* fermée *lorsque tout point adhérent à* $\mathcal{F}$ *appartient à* $\mathcal{F}$*, soit encore lorsque toute suite d'éléments de* $\mathcal{F}$ *convergeant dans* E *a sa limite dans* $\mathcal{F}$.

Exemple.

- Les intervalles fermés de $\mathbb{R}$ sont des fermés ;
- toute boule fermée est un fermé ;
- toute sphère $S(a,r) = \left\{ x \in E \;\middle|\; \|x-a\| = r \right\}$ est un fermé ;
- $\varnothing$ et E sont des fermés ;
- la réunion ou l'intersection de deux fermés est un fermé.

Proposition 1.2 — *Dans un espace vectoriel de dimension finie, les sous-espaces vectoriels de* E *sont des fermés.*

Enfin, le résultat qui suit établit que les notions d'ouvert et de fermé sont indissociables :

Théorème 1.3 — *Une partie* $\mathcal{F}$ *de* E *est fermée si et seulement si la partie complémentaire* $\mathcal{O} = E \setminus \mathcal{F}$ *est ouverte.*

Exercice 2. Soit A une partie d'un espace vectoriel normé E.

a) Montrer que A est ouvert si et seulement si $A \cap \mathrm{Fr}(A) = \varnothing$;

b) Montrer que A est fermé si et seulement si $\mathrm{Fr}(A) \subset A$.

2. Continuité des fonctions à plusieurs variables

Dans cette section, E et F désignerons deux $\mathbb{R}$-espaces vectoriels normés de dimensions finies, la norme étant notée $\|\cdot\|$ indépendamment de l'espace, mais le plus souvent nous auront $E = \mathbb{R}^2$ et $F = \mathbb{R}$.
$\mathcal{U}$ désignera une partie de E, et $f : \mathcal{U} \to F$ une fonction à plusieurs variables.

2.1 Étude locale d'une application

Définition. — *Si a désigne un point de E adhérent à $\mathcal{U}$, on dit que $f(x)$ admet $\ell \in$ F pour limite lorsque x tend vers a lorsque :*

$$\boxed{\forall \epsilon > 0,\ \exists \eta > 0 \ \Big|\ \forall x \in \mathcal{U}, \quad \|x - a\| \leqslant \eta \Rightarrow \|f(x) - \ell\| \leqslant \epsilon.}$$

On notera dans ce cas : $\lim\limits_{x \to a} f(x) = \ell$.

L'existence d'une limite, et la valeur de cette limite, sont des notions qui ne dépendent pas des normes utilisées si on remplace une norme par une norme équivalente, ce qui est toujours le cas en dimension finie.

Exemple. Considérons la fonction $f_1 : \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\} \to \mathbb{R}$ définie par $f_1(x,y) = \dfrac{x^2 y}{x^2 + y^2}$, et utilisons la norme euclidienne canonique sur $\mathbb{R}^2$: $\|(x,y)\|_2 = \sqrt{x^2 + y^2}$.
Sachant que $|x| \leqslant \|(x,y)\|$ et $|y| \leqslant \|(x,y)\|$, nous pouvons affirmer que $|f_1(x,y)| \leqslant \|(x,y)\|$, ce qui implique : $\lim\limits_{(x,y) \to (0,0)} f_1(x,y) = 0$.

Les théorèmes généraux relatifs aux opérations algébriques sur les limites se généralisent sans peine, ainsi que celui relatif à la limite d'une application composée.
Pour prouver qu'une fonction n'a pas de limite, il peut notamment être intéressant de faire intervenir une fonction vectorielle $\phi : \mathrm{I} \subset \mathbb{R} \to \mathcal{U}$ pour laquelle $\lim\limits_{t \to 0} \phi(t) = a$. Si f possède une limite ℓ en a nous aurons nécessairement : $\lim\limits_{t \to 0} f \circ \phi(t) = \ell$.

Exemple. Considérons la fonction $f_2 : \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\} \to \mathbb{R}$ définie par $f_2(x,y) = \dfrac{x^2 y}{x^4 + y^2}$.
Nous avons : $\lim\limits_{t \to 0} f_2(t,t) = \lim\limits_{t \to 0} \dfrac{t}{t^2 + 1} = 0$ mais $\lim\limits_{t \to 0} f_2(t, t^2) = \dfrac{1}{2}$, donc f_2 ne possède pas de limite en $(0,0)$.

Exercice 3. Déterminer si les fonctions suivantes, définies sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$, ont une limite finie en $(0,0)$:

$$f(x,y) = \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}, \qquad g(x,y) = \frac{|x+y|}{x^2 + y^2}, \qquad h(x,y) = (x+y)\sin\Big(\frac{1}{x^2 + y^2}\Big).$$

Enfin, on peut faire le lien avec les suites de vecteurs :

Théorème 2.1 (caractérisation séquentielle) — *$f(x)$ admet ℓ pour limite lorsque x tend vers a si et seulement si pour toute suite (a_n) d'éléments de $\mathcal{U}$ qui converge vers a, la suite $\big(f(a_n)\big)$ converge vers ℓ.*

■ Relations de comparaison

Soit a un point adhérent à $\mathcal{U}$, et $\phi : \mathcal{U} \to \mathbb{R}$ une fonction *à valeurs réelles* ne s'annulant pas en dehors de a.
On dit que f est *dominée* par ϕ au voisinage de a lorsque f/ϕ est bornée au voisinage de a ; on note alors $f(x) \underset{a}{=} \mathrm{O}\big(\phi(x)\big)$.

On dit que f est *négligeable* devant ϕ au voisinage de a lorsque $\lim\limits_{x \to a} \dfrac{f(x)}{\phi(x)} = 0$; on note alors : $f(x) \underset{a}{=} \mathrm{o}\big(\phi(x)\big)$.

Exemples. $f(x) \underset{a}{=} \mathrm{O}(1)$ traduit le fait que f est bornée au voisinage de a.
$f(x) \underset{a}{=} \ell + \mathrm{o}(1)$ traduit le fait que $\lim\limits_{x \to a} f(x) = \ell$.

2.2 Continuité

Définition. — *f est dite* continue *en $a \in \mathcal{U}$ lorsque $\lim\limits_{x \to a} f(x) = f(a)$, autrement dit lorsque :*

$$\boxed{\forall \epsilon > 0,\ \exists \eta > 0 \ \Big|\ \forall x \in \mathcal{U}, \quad \|x - a\| \leqslant \eta \Rightarrow \|f(x) - f(a)\| \leqslant \epsilon.}$$

Les propriétés générales de la continuité que nous avons établies au sujet des fonctions vectorielles s'étendent sans difficulté aux fonctions à plusieurs variables. En particulier, la décomposition dans une base de F permet de ramener l'étude de la continuité à des fonctions à valeurs réelles : si $(e_1,\dots,e_n)$ est une base de F et $f = f_1e_1+\cdots+f_ne_n$, f est continue en a si et seulement si les fonctions à valeurs réelles $f_1,\dots,f_n$ sont continues en a.
Seul le résultat suivant est réellement nouveau :

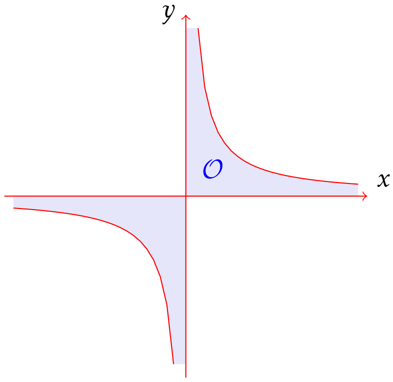
Théorème 2.2 — *On considère une fonction $f : \mathrm{E} \to \mathbb{R}$ une fonction continue à valeurs réelles ou complexes.*

– *Si $\mathcal{O}$ désigne une partie ouverte de $\mathbb{R}$, alors : $f^{-1}(\mathcal{O}) = \left\{x \in \mathrm{E} \,\middle|\, f(x) \in \mathcal{O}\right\}$ est un ouvert de* E.

– *Si $\mathcal{F}$ désigne une partie fermée de $\mathbb{R}$, alors : $f^{-1}(\mathcal{F}) = \left\{x \in \mathrm{E} \,\middle|\, f(x) \in \mathcal{F}\right\}$ est un fermé de* E.

Ce résultat permet en particulier de donner des exemples simples de parties ouvertes ou fermées. Par exemple, si $f : \mathrm{E} \to \mathbb{R}$ est une fonction continue, et $\alpha \in \mathbb{R}$, la partie $\left\{x \in \mathrm{E} \,\middle|\, f(x) > \alpha\right\}$ est ouverte et les parties $\left\{x \in \mathrm{E} \,\middle|\, f(x) \geqslant \alpha\right\}$ et $\left\{x \in \mathrm{E} \,\middle|\, f(x) = \alpha\right\}$ fermées.

Exemple. L'ensemble $\mathcal{O} = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,\middle|\, 0 < xy < 1\right\}$ est un ouvert de $\mathbb{R}^2$.
En effet, l'application $\begin{pmatrix} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x,y) & \longmapsto & xy \end{pmatrix}$ est continue et $]0,1[$ est un ouvert de $\mathbb{R}$.



> **Exercice 4.** Soit $\mathrm{A} = \left\{(x_1,\dots,x_n) \in \mathbb{R}^n \,\middle|\, i \neq j \implies x_i \neq x_j\right\}$. Montrer que A est un ouvert de $\mathbb{R}^n$.

Nous avons vu que les parties ouvertes possédaient un certain nombre de propriétés communes avec les intervalles ouverts ; il en est de même des parties fermées et des intervalles fermés.
De la même façon, les parties fermées et bornées possèdent des propriétés communes avec les segments, notament le résultat suivant, que nous admettrons :

Théorème 2.3 — *Soit $\mathcal{K}$ une partie fermée et bornée d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel normé* E *de dimension finie, et $f : \mathcal{K} \to \mathbb{R}$ une fonction continue. Alors f est bornée et atteint ses bornes.*

Ce résultat nous sera en particulier fort utile pour déterminer les extremums d'une fonction à plusieurs variables.

■ Fonctions lipschitziennes

Une application lipschitzienne est une application possédant une propriété de régularité plus forte que la continuité.

Définition. — *Soient* E *et* F *deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels normés, $\mathcal{U}$ une partie de* E, *et $k > 0$. Une application $f : \mathcal{U} \to \mathrm{F}$ est dite k-*lipschitzienne *lorsque :*

$$\boxed{\forall (x,y) \in \mathcal{U}^2, \quad \|f(y) - f(x)\| \leqslant k\|y - x\|.}$$

Théorème 2.4 — *Toute application lipschizienne est continue sur son ensemble de définition.*

Exemple. La seconde inégalité triangulaire : $\big|\|y\| - \|x\|\big| \leqslant \|y - x\|$ traduit le fait que l'application $x \mapsto \|x\|$ est une application 1-lipschitzienne de E ; il s'agit donc d'une application continue.

2.3 Le cas des applications linéaires

Parmi les applications d'un espace vectoriel vers un autre se trouve en particulier les applications linéaires. Il est légitime de se poser la question de leur continuité. Cette section y répond, en montrant mieux : toute application linéaire est, en dimension finie, lipschitzienne.
Mais tout d'abord, constatons que la définition de cette notion se simplifie dans le cas d'une application linéaire $u \in \mathcal{L}(\mathrm{E},\mathrm{F})$: en effet, u est k-lipschitzienne si et seulement si :

$$\begin{aligned} &\forall (x,y) \in \mathrm{E}^2, \quad \|u(y)-u(x)\| \leqslant k\|y-x\| \\ \iff &\forall (x,y) \in \mathrm{E}^2, \quad \|u(y-x)\| \leqslant k\|y-x\| \\ \iff &\forall z \in \mathrm{E}, \quad \|u(z)\| \leqslant k\|z\| \end{aligned}$$

Nous pouvons maintenant démontrer le :

Théorème 2.5 — *Soient* E *et* F *deux espaces vectoriels normés de dimensions finies, et* $u \in \mathcal{L}(\mathrm{E},\mathrm{F})$. *Alors* u *est lipschitzienne, et donc continue.*

■ Applications bilinéaires

Pour finir, un bref mot sur les applications bilinéaires, qui, de manière analogue aux applications linéaires, sont des applications continues en dimension finie.

Lemme — *Soient* E, F, G *trois espaces vectoriels normés de dimensions finies, et* $\mathrm{B} : \mathrm{E}\times\mathrm{F} \to \mathrm{G}$ *une forme bilinéaire. Alors il existe une constante* k *telle que :*

$$\forall (x,y) \in \mathrm{E}\times\mathrm{F}, \quad \|\mathrm{B}(x,y)\| \leqslant k\|x\|.\|y\|.$$

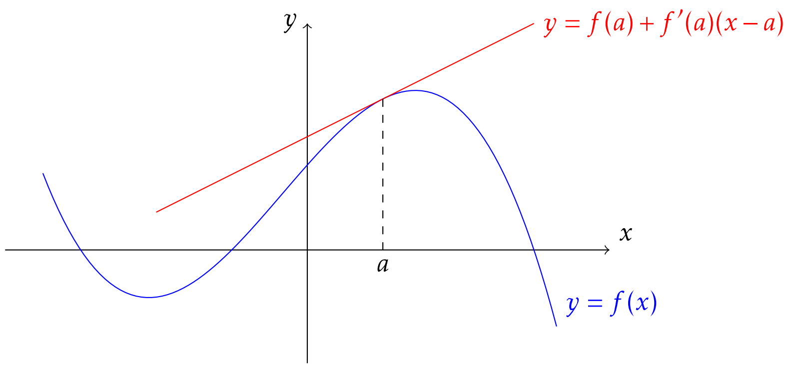
Proposition 2.6 — *Soient* E, F, G *trois espaces vectoriels normés de dimensions finies, et* $\mathrm{B} : \mathrm{E}\times\mathrm{F} \to \mathrm{G}$ *une forme bilinéaire. Alors* B *est continue.*

Exemple. Si E est un espace euclidien, l'application $(x,y) \to \langle x \mid y \rangle$ est une application continue.

3. Calcul différentiel

3.1 Applications différentiables

Pour comprendre comment nous allons généraliser la notion de dérivée aux fonctions à plusieurs variables, observons l'interprétation géométrique qu'on peut faire de la dérivée en $a \in \mathrm{I}$ d'une fonction à une variable $f : \mathrm{I} \to \mathbb{R}$.



Au voisinage de a, le graphe de f est approché par une droite, sa tangente. Autrement dit, f est localement approchée par l'application affine $x \mapsto f(a)+f'(a)(x-a)$, ce qui se traduit par le développement limité suivant :

$$f(x) \underset{a}{=} f(a) + f'(a)(x-a) + \mathrm{o}(x-a).$$

qu'on peut écrire de façon équivalente :

$$f(a+h) \underset{0}{=} f(a) + f'(a)h + o(h).$$

Cette approximation affine est formée d'une constante $f(a)$ et d'une *application linéaire* $h \mapsto f'(a)h$. Ceci nous conduit à adopter la définition suivante :

Définition. — *Soient* E *et* F *deux* $\mathbb{R}$*-espaces vectoriels normés de dimensions finies,* $\mathcal{U}$ *un ouvert de* E *et* $f : \mathcal{U} \to \mathrm{F}$ *une application.*
On dira que f *est* différentiable *en* $a \in \mathcal{U}$ *lorsqu'il existe une application linéaire* $u \in \mathcal{L}(\mathrm{E},\mathrm{F})$ *telle que :*

$$f(a+h) \underset{0_{\mathrm{E}}}{=} f(a) + u(h) + o\big(\|h\|\big).$$

Dans ce cas, l'application linéaire u est appelée la *différentielle* de f en a, et sera notée $\mathrm{d}f(a)$. Ainsi, on écrira :

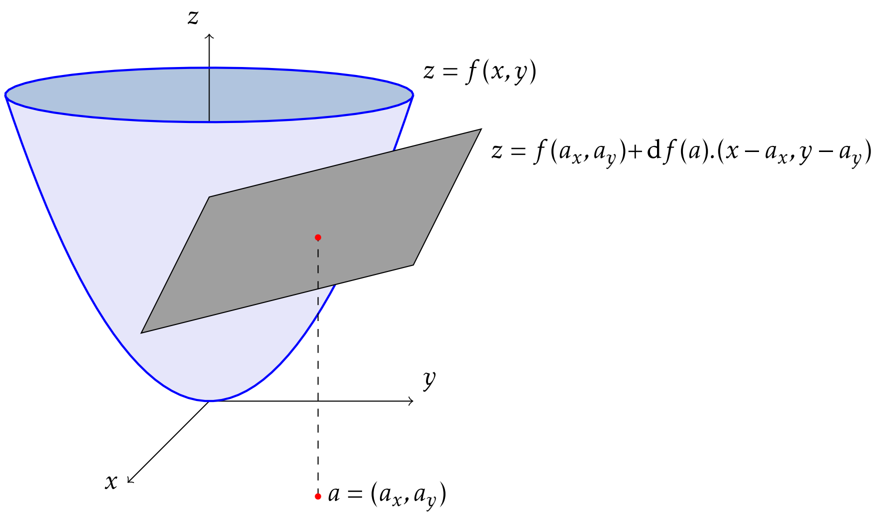
$$\boxed{f(a+h) \underset{0_{\mathrm{E}}}{=} f(a) + \mathrm{d}f(a).h + o\big(\|h\|\big).} \qquad \text{ou encore :} \qquad \boxed{f(x) \underset{a}{=} f(a) + \mathrm{d}f(a).(x-a) + o\big(\|x-a\|\big)}$$

Notons que la différentiabilité de f en a entraîne *a fortiori* la continuité de f en a, puisqu'une application linéaire est continue.

Exemple. Dans le cas où $\mathrm{E} = \mathbb{R}^2$ et $\mathrm{F} = \mathbb{R}$, les applications affines prennent la forme suivante :

$$\tilde{u} : \left(\begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \longmapsto & \mathbb{R} \\ (x,y) & \longmapsto & \alpha + \beta x + \gamma y \end{array} \right)$$

et le graphe de cette application affine est le plan affine d'équation $z = \alpha + \beta x + \gamma y$. Autrement dit, la nappe d'équation $z = f(x,y)$ est localement approchée par un plan.



> **Exercice 5.** Soit $f : \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \to \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ l'application définie par $f(\mathrm{M}) = \mathrm{M}^2$. Montrer que f est différentiable en tout point $\mathrm{A} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, et déterminer l'application linéaire $\mathrm{d}f(\mathrm{A})$.

Remarque. Lorsque f est une application linéaire, l'égalité $f(x) = f(a) + f(x-a)$ montre que sa différentielle en a est égale à elle-même : pour tout $a \in \mathrm{E}$, $\mathrm{d}f(a) = f$.

• différence entre dérivée et différentielle
Dans le cas des fonctions numériques, la dérivée de f en a est le réel $f'(a)$, alors que la différentielle de f en a est l'application linéaire $x \mapsto f'(a)x$. En effet, les applications linéaires de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ s'écrivent de manière unique sous la forme : $x \mapsto \lambda x$, avec $\lambda \in \mathbb{R}$.

On peut se rapprocher encore de la notion de dérivée lorsque $F = \mathbb{R}$: dans ce cas, la différentielle $df(a)$ de f en a est une application linéaire de E dans $\mathbb{R}$, c'est à dire une *forme linéaire*. Or lorsque E est un espace euclidien, nous avons vu que les formes linéaires sur E s'écrivent de manière unique sous la forme $x \mapsto \langle \ell \mid x\rangle$, avec $\ell \in E$. Cela conduit à la définition :

Définition. — *Lorsque $f : \mathcal{U} \subset E \to \mathbb{R}$ est différentiable en $a \in E$, il existe un unique vecteur de E, noté $\nabla f(a)$ tel que :*

$$\forall h \in E, \quad \boxed{df(a).h = \langle \nabla f(a) \mid h\rangle.}$$

Le vecteur $\nabla f(a)$ est appelé le gradient *de f en a.*

Exercice 6. Soit E un espace euclidien, et $f : E \to \mathbb{R}$ défini par $f(x) = \langle x \mid x\rangle$. Montrer que f est différentiable en tout $a \in E$, et déterminer le vecteur $\nabla f(a)$.

3.2 Dérivées partielles

Nous allons maintenant nous attacher à voir comment calculer une différentielle (ou un gradient) dans le cas où $E = \mathbb{R}^p$ et $F = \mathbb{R}$. L'idée que nous allons suivre est d'essayer, autant que faire se peut, de se ramener à des calculs de dérivées de fonctions d'une seule variable.
Sachant que f est définie sur un *ouvert* $\mathcal{U}$ de $\mathbb{R}^p$, l'application partielle $t \mapsto f(a+th)$ est, quel que soit le vecteur $h \in \mathbb{R}^p$, une fonction vectorielle définie au voisinage de 0. En particulier, lorsque $h = e_k$ est le k^e vecteur de la base canonique de $\mathbb{R}^p$, cette application prend la forme suivante :

$$t \mapsto f(a_1, a_2, \dots, a_{k-1}, a_k + t, a_{k+1}, \dots, a_p).$$

Lorsque cette application est dérivable en 0, on note $\partial_k f(a)$ ou $\dfrac{\partial f}{\partial x_k}(a)$ sa dérivée en 0, quantité qu'on appelle la k^e *dérivée partielle d'ordre 1* de f en a. Autrement dit :

$$\forall k \in [\![1, p]\!], \qquad \partial_k f(a) = \lim_{t \to 0} \frac{f(a_1, \dots, a_k + t, \dots, a_p) - f(a_1, \dots, a_k, \dots, a_p)}{t}.$$

Proposition 3.1 — *Lorsque f est différentiable en a, f admet en a des dérivées partielles d'ordre 1 et pour tout $h = (h_1, \dots, h_p) \in \mathbb{R}^p$, $\boxed{df(a).h = \sum_{k=1}^{p} \partial_k f(a) h_k.}$ Autrement dit, $\boxed{\nabla f(a) = \big(\partial_1 f(a), \dots, \partial_p f(a)\big).}$*

La réciproque de ce résultat est fausse : une fonction peut posséder des dérivées partielles en a sans être différentiable en ce point. Cependant, en renforçant un peu les hypothèses on dispose du résultat suivant, avec lequel nous allons maintenant justifier l'existence de la différentielle :

Théorème 3.2 — *Soit $\mathcal{U}$ un ouvert de $\mathbb{R}^p$, et $f : \mathcal{U} \to \mathbb{R}$ une fonction. On suppose que :*

(i) f possède pour tout $k \in [\![1, p]\!]$ et en tout point a de $\mathcal{U}$ une dérivée partielle $\partial_k f(a)$;

(ii) pour tout $k \in [\![1, p]\!]$, l'application $\partial_k f : \mathcal{U} \to \mathbb{R}$ est continue sur $\mathcal{U}$.

Alors f est différentiable en tout point a de $\mathcal{U}$.

Une application f vérifiant ces hypothèses sera dorénavant dite *de classe* $\mathscr{C}^1$ sur $\mathcal{U}$.

Exemple. Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ défini par $f(x, y) = x^2 y$. f admet en tout point (x, y) des dérivées partielles $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x, y) = 2xy$ et $\dfrac{\partial f}{\partial y}(x, y) = x^2$ à l'évidence continues, donc f est de classe $\mathscr{C}^1$ et $\nabla f(x, y) = 2xy\vec{e}_1 + x^2\vec{e}_2$.
La différentielle s'écrit donc $df(x, y) : (u, v) \mapsto 2xyu + x^2 v$.

Exercice 7. On considère la fonction $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par $f(x, y) = \dfrac{x^2 y}{x^2 + y^2}$ si $(x, y) \neq (0, 0)$ et $f(0, 0) = 0$.

La fonction f est-elle de classe $\mathscr{C}^1$?

3.3 Règle de la chaîne

Considérons une fonction $f\mathcal{U} \subset \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}$ de classe $\mathscr{C}^1$, I un intervalle et $x_k : \mathrm{I} \to \mathbb{R}$, $1 \leqslant k \leqslant p$ des fonctions elles aussi de classe $\mathscr{C}^1$ telles que pour tout $t \in \mathrm{I}$, $(x_1(t), \ldots, x_p(t)) \in \mathcal{U}$. On peut dès lors définir la fonction $\phi : \mathrm{I} \to \mathbb{R}$ par $\phi(t) = f\big(x_1(t), \ldots, x_p(t)\big)$.
Le résultat suivant, appelé *règle de la dérivation en chaîne*, ou plus simplement *règle de la chaîne*, donne la règle de dérivation d'une telle fonction.

Théorème 3.3 (règle de la chaîne) — *Si f et toutes les fonctions $x_1, \ldots, x_p$ sont de classe $\mathscr{C}^1$, il en est de même de la fonction ϕ, et*

$$\forall t \in \mathrm{I}, \qquad \boxed{\phi'(t) = \sum_{k=1}^{p} x_k'(t) \partial_k f\big(x_1(t), \ldots, x_p(t)\big) = \sum_{k=1}^{p} x_k'(t) \frac{\partial f}{\partial x_k}\big(x_1(t), \ldots, x_p(t)\big).}$$

Exemple. En dynamique des fluides, la *description eulérienne* d'un fluide consiste à se placer en un point fixe et à observer les modifications des propriétés du fluide qui défile en ce point. Une telle propriété sera donc définie par une fonction $\mathrm{E}(t, x, y, z)$ à 4 variables indépendantes.
En revanche, la *description lagrangienne* consiste à suivre une particule dans son mouvement. Une telle propriété sera définie par la fonction $e(t) = \mathrm{E}\big(t, x(t), y(t), g(t)\big)$, où $t \mapsto \big(x(t), y(t), z(t)\big)$ décrit la trajectoire de la particule au cours du temps. On a donc :

$$e'(t) = \frac{\partial \mathrm{E}}{\partial t}\big(t, x(t), y(t), g(t)\big) + x'(t)\frac{\partial \mathrm{E}}{\partial x}\big(t, x(t), y(t), g(t)\big) + y'(t)\frac{\partial \mathrm{E}}{\partial y}\big(t, x(t), y(t), g(t)\big) + z'(t)\frac{\partial \mathrm{E}}{\partial z}\big(t, x(t), y(t), g(t)\big)$$

Un physicien aura tendance à noter de la même façon la propriété E de la description eulérienne et la propriété e de la description lagrangienne, ce qui l'amènera à écrire :

$$\frac{\mathrm{DE}}{\mathrm{D}t} = \frac{\partial \mathrm{E}}{\partial t} + x'\frac{\partial \mathrm{E}}{\partial x} + y'\frac{\partial \mathrm{E}}{\partial y} + z'\frac{\partial \mathrm{E}}{\partial z} = \frac{\partial \mathrm{E}}{\partial t} + \langle v \mid \nabla \mathrm{E} \rangle$$

où v désigne la vitesse de la particule et D la dérivation au sens lagrangien.

Exercice 8. Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathscr{C}^1$, et $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par : $\forall (r, \theta) \in \mathbb{R}^2$, $g(r, \theta) = f(r\cos\theta, r\sin\theta)$. Calculer les dérivées partielles de g en fonction de celles de f, et en déduire l'expression du gradient en coordonnées polaires.

Proposition 3.4 — *Soit $\mathcal{U}$ un ouvert convexe de $\mathbb{R}^p$, et $f : \mathcal{U} \to \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathscr{C}^1$. Alors f est constante sur $\mathcal{U}$ si et seulement si pour tout $a \in \mathcal{U}$, $\mathrm{d}f(a) = 0$, autrement dit si et seulement si les fonctions $\partial_1 f, \ldots, \partial_p f$ sont nulles sur $\mathcal{U}$.*

3.4 Extremums locaux

Dans cette section, nous considérons un domaine (non nécessairement ouvert) $\mathcal{U}$ de $\mathbb{R}^p$ ainsi qu'une fonction $f : \mathcal{U} \subset \mathrm{E} \to \mathbb{R}$.

Définition. — *On dit que f présente en un point $a \in \mathcal{U}$ un* maximum local *lorsqu'il existe un réel $r > 0$ tel que pour tout $x \in \mathrm{B}(a, r) \cap \mathcal{U}$, $f(x) \leqslant f(a)$.*
On dit que f présente en $a \in \mathcal{U}$ un maximum global *lorsque pour tout $x \in \mathcal{U}$, $f(x) \leqslant f(a)$.*

On définit de la même façon les notions de minimum local et de minimum global.

Remarque. De cette définition il résulte immédiatement que tout extremum global est un extremum local, la réciproque n'étant bien évidemment pas vraie.

Théorème 3.5 — *Soit $\mathcal{U}$ un ouvert de $\mathbb{R}^p$, $f : \mathcal{U} \to \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathscr{C}^1$, et $a \in \mathcal{U}$ un point en lequel f présente un extremum local. Alors :* $\mathrm{d}f(a) = 0$ *(la forme linéaire nulle).*

Remarque. La condition $\mathrm{d}f(a)=0$, qui peut s'écrire $\nabla f(a)=0_{\mathrm{E}}$, est donc une condition *nécessaire* mais non *suffisante* pour que f présente un extremum local en a dans l'*ouvert* $\mathcal{U}$.
Un point a en lequel $\nabla f(a)=0_{\mathrm{E}}$ est appelé un *point critique* de f.

Exercice 9. Déterminer les points critiques de la fonction $f:(x,y)\mapsto x\,\mathrm{e}^{y}+y\,\mathrm{e}^{x}$ sur $\mathbb{R}^2$, puis déterminer s'il s'agit d'extremum locaux ou pas.

• **Recherche d'extremums globaux sur une partie fermée bornée de $\mathbb{R}^p$**

Considérons maintenant une partie $\mathcal{K}$ fermée et bornée de $\mathbb{R}^p$ et une application $f:\mathcal{K}\to\mathbb{R}$ continue, sur $\mathcal{K}$, de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathring{\mathcal{K}}$.
Le théorème 2.3 assure l'existence d'un minimum et d'un maximum global sur $\mathcal{K}$. Ces deux extremums se trouvent ou bien sur la frontière $\mathrm{Fr}(\mathcal{K})$ de $\mathcal{K}$, ou bien dans l'intérieur $\mathring{\mathcal{K}}=\mathcal{K}\setminus\mathrm{Fr}(\mathcal{K})$ de $\mathcal{K}$. En d'autres termes, les extremums globaux sont à chercher :

- sur la frontière de $\mathcal{K}$;
- et parmi les points critiques de l'intérieur de $\mathcal{K}$.

Exercice 10. Soit $\mathcal{K}=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \;\middle|\; x\geqslant 0,\ y\geqslant 0,\ x+y\leqslant 1\right\}$, et $f:\mathcal{K}\to\mathbb{R}$ définie par $f(x,y)=xy(1-x-y)$.
Déterminer la valeur maximale prise par la fonction f.

3.5 Dérivées partielles d'ordre deux

Soit $\mathcal{U}$ un ouvert de $\mathbb{R}^p$, et $f:\mathcal{U}\to\mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathscr{C}^1$. Les applications $\partial_i f=\dfrac{\partial f}{\partial x_i}$ sont des applications définies et continues de $\mathcal{U}$ dans $\mathbb{R}$ et à ce titre peuvent être elles-mêmes de classe $\mathscr{C}^1$. Lorsque c'est le cas, on note $\partial_j\partial_i f=\dfrac{\partial^2 f}{\partial x_j\partial x_i}$ la dérivée partielle par rapport à la j^{e} variable de $\partial_i f$.

Remarque. Dans le cas particulier où $i=j$ on utilisera plutôt la notation $\partial_i^2 f$ ou $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x_i^2}$.

Définition. — *Une application $f:\mathcal{U}\to\mathbb{R}$ est dite* de classe $\mathscr{C}^2$ *lorsqu'elle est de classe $\mathscr{C}^1$ et lorsque pour tout $i\in[\![1,p]\!]$, $\partial_i f$ est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathcal{U}$.*

A priori, l'expression $\partial_j\partial_i f$ signifie que l'on dérive *d'abord* par rapport à x_i, *puis* par rapport à x_j. cependant, le théorème suivant, que nous admettrons, montre qu'il n'en est rien dans le cas d'une fonction de classe $\mathscr{C}^2$.

Théorème 3.6 (Théorème de Schwarz) — *Soit $f:\mathcal{U}\subset\mathbb{R}^p\to\mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathscr{C}^2$. Alors pour $(i,j)\in[\![1,p]\!]^2$, $\partial_j\partial_i f=\partial_i\partial_j f$.*

Exercice 11. Soit $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathscr{C}^2$, et $g:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ définie par : $\forall(r,\theta)\in\mathbb{R}^2$, $g(r,\theta)=f(r\cos\theta,r\sin\theta)$. Calculer quatre les dérivées partielles secondes de g en fonction de celles de f.
On appelle *laplacien* de f la quantité : $\Delta f=\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}$. Déduire des calculs précédents l'expression du laplacien en coordonnées polaires (c'est à dire en fonction des dérivées de g).

■ Équations aux dérivées partielles

En sciences physiques il est fréquent d'avoir à résoudre une équation mêlant les dérivées partielles d'ordre 1 ou 2 d'une même fonction. Le phénomène de propagation des ondes peut par exemple être modélisé par l'équation de d'Alembert $\Delta f-\dfrac{1}{c^2}\dfrac{\partial^2 f}{\partial t^2}=0$. En dimension 1, cette équation s'écrit $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,t)-\dfrac{1}{c^2}\dfrac{\partial^2 f}{\partial t^2}(x,t)=0$.

Il n'y a pas de méthode générale de résolution, mais celle-ci passe le plus souvent par l'utilisation d'un changement de variable.
On appelle *changement de variable de classe* $\mathscr{C}^k$ une application bijective $\phi : \mathcal{U} \to \mathcal{V}$ entre deux ouverts $\mathcal{U}$ et $\mathcal{V}$ de $\mathbb{R}^p$ telle que ϕ et ϕ^{-1} soient toutes deux de classe $\mathscr{C}^k$. Nous nous restreindrons à deux types de changement de variable : les changements de variables affines et le changement de variable en coordonnées polaires.

Un changement de variable *affine* consiste simplement à poser $\begin{cases} u = ax + by + e \\ v = cx + dy + f \end{cases}$ qui se traduit matriciellement par $\mathrm{Y} = \mathrm{AX} + \mathrm{B}$ avec $\mathrm{A} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ et $\mathrm{B} = \begin{pmatrix} e \\ f \end{pmatrix}$. Pour qu'il soit bijectif, il faut et il suffit que $\det \mathrm{A} \neq 0$, et il s'agit alors d'un changement de variable de classe $\mathscr{C}^\infty$.

Par exemple, pour résoudre l'équation de propagation en dimension 1, on posera $\begin{cases} u = x + ct \\ v = x - ct \end{cases}$ et $g(u,v) = f(x,t)$.
Cette dernière équation introduit une nouvelle fonction inconnue g, et peut être comprise de deux façons :

– $g(u,v) = f\Big(\dfrac{u+v}{2}, \dfrac{u-v}{2c}\Big)$ (pour définir g à partir de f) ;

– $f(x,t) = g(x+ct, x-ct)$ (pour retrouver f une fois déterminé g).

On calcule successivement :

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,t) = \frac{\partial g}{\partial u}(x+ct,x-ct) + \frac{\partial g}{\partial v}(x+ct,x-ct) \qquad \frac{\partial f}{\partial t}(x,t) = c\frac{\partial g}{\partial u}(x+ct,x-ct) - c\frac{\partial g}{\partial v}(x+ct,x-ct)$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,t) = \frac{\partial^2 g}{\partial u^2}(u,v) + 2\frac{\partial^2 g}{\partial u \partial v}(u,v) + \frac{\partial^2 g}{\partial v^2}(u,v) \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial t^2}(x,t) = c^2\frac{\partial^2 g}{\partial u^2}(u,v) - 2c^2\frac{\partial^2 g}{\partial u \partial v}(u,v) + c^2\frac{\partial^2 g}{\partial v^2}(u,v)$$

et alors : $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,t) - \dfrac{1}{c^2}\dfrac{\partial^2 f}{\partial t^2}(x,t) = 0 \iff 4\dfrac{\partial^2 g}{\partial u \partial v}(u,v) = 0$.

Cette équation est maintenant aisément résoluble : la fonction $\dfrac{\partial g}{\partial v}$ est indépendante de u donc ne dépend que de v. La fonction g s'écrit donc sous la forme $g(u,v) = \phi(u) + \psi(v)$, où ϕ et ψ sont deux fonctions quelconques de classe $\mathscr{C}^2$. Il reste à revenir à f en concluant que $f(x,t) = \phi(x+ct) + \psi(x-ct)$.

• **Le changement de variables en coordonnées polaires**

En toute rigueur, pour que le changement de variable $\begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\sin\theta \end{cases}$ soit bijectif et de classe $\mathscr{C}^\infty$ ainsi que sa réciproque, il est nécessaire d'imposer $r \in]0,+\infty[$ et $\theta \in]\alpha, \alpha+2\pi[$, ce qui restreint (x,y) à $\mathbb{R}^2 \setminus \mathcal{D}_\alpha$, où $\mathcal{D}_\alpha$ est la demi-droite fermée issue de l'origine et d'angle α par rapport à l'axe $\mathrm{O}x$.
Une fois ceci précisé, l'équation $f(x,y) = g(r,\theta)$ peut s'écrire $g(r,\theta) = f(r\cos\theta, r\sin\theta)$. En revanche, on observera que faute d'une expression simple de θ en fonction de x et de y, il sera plus difficile d'exprimer $f(x,y)$ en fonction de g, x et y, aussi va-t-on dans ce cas calculer les dérivées partielles de g en fonction de celles de f :

$$\frac{\partial g}{\partial r}(r,\theta) = \cos\theta\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) + \sin\theta\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) \qquad \text{et} \qquad \frac{\partial g}{\partial \theta}(r,\theta) = -r\sin\theta\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) + r\cos\theta\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)$$

Par exemple, l'équation aux dérivées partielles $y\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y) - x\dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 0$ s'écrit $\dfrac{\partial g}{\partial \theta}(r,\theta) = 0$ en coordonnées polaires, soit $g(r,\theta) = \phi(r)$ où ϕ est une fonction de classe $\mathscr{C}^1$, et $f(x,y) = \phi\Big(\sqrt{x^2+y^2}\Big)$.
De même, l'équation $x\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y) + y\dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 0$ s'écrit $\dfrac{1}{r}\dfrac{\partial g}{\partial r}(r,\theta) = 0$ en coordonnées polaires, soit $g(r,\theta) = \psi(\theta)$ où ψ est une fonction de classe $\mathscr{C}^1$. Ici, faute d'une expression convenable pour la fonction θ, on se contentera de conclure que $f(x,y) = \psi\big(\theta(x,y)\big)$.

3.6 Applications géométriques

■ Courbes du plan

Définir une courbe du plan se fait généralement par l'intermédiaire d'une paramétrisation $\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases}$ ou par le biais d'une équation implicite $f(x,y) = \lambda$, où $f : \mathcal{U} \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ et $\lambda = 0$.

Dans le premier cas, nous avons vu que si $(a,b) = (x(t_0), y(t_0))$ est un point régulier de la courbe, la tangente à cette dernière est dirigée par le vecteur $x'(t_0)\vec{e_1} + y'(t_0)\vec{e_2}$.

Dans le second cas, nous allons admettre que si f est de classe $\mathscr{C}^1$ alors en tout point (a,b) de cette courbe où la différentielle $\mathrm{d}f(a,b)$ ne s'annule pas, la courbe d'équation $f(x,y) = \lambda$ possède une paramétrisation $\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases}$ au voisinage du point $(a,b) = (x(t_0), y(t_0))$.

Au voisinage de t_0 nous avons donc $f(x(t), y(t)) = \lambda$ et en dérivant : $x'(t)\dfrac{\partial f}{\partial x}(x(t), y(t)) + y'(t)\dfrac{\partial f}{\partial y}(x(t), y(t)) = 0$.

Prise pour $t = t_0$ cette équation s'écrit : $x'(t_0)\dfrac{\partial f}{\partial x}(a,b) + y'(t_0)\dfrac{\partial f}{\partial y}(a,b) = 0$. Nous avons démontré le

Théorème 3.7 — *Soit $f : \mathcal{U} \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ une application de classe $\mathscr{C}^1$, et $\lambda \in \mathbb{R}$. En un point (a,b) de la courbe d'équation $f(x,y) = \lambda$ en lequel $\mathrm{d}f(a,b)$ n'est pas nul, le vecteur $\nabla f(a,b)$ est un vecteur normal à la tangente. L'équation de cette dernière s'écrit donc :*

$$\frac{\partial f}{\partial x}(a,b)(x-a) + \frac{\partial f}{\partial y}(a,b)(y-b) = 0.$$

Remarque. En sciences physiques, les courbes d'équation $f(x,y) = \lambda$ sont appelées des *lignes de niveau*, et nous venons de démontrer qu'en un point où il est non nul, le gradient de f est orthogonal aux lignes de niveau, et orienté dans le sens des valeurs croissantes de f.

Exemple. L'ellipse $\mathcal{E}$ d'équation $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$ admet en tout point $(x_0, y_0) \in \mathcal{E}$ une tangente d'équation

$$\frac{x_0}{a^2}(x - x_0) + \frac{y_0}{b^2}(y - y_0) = 0.$$

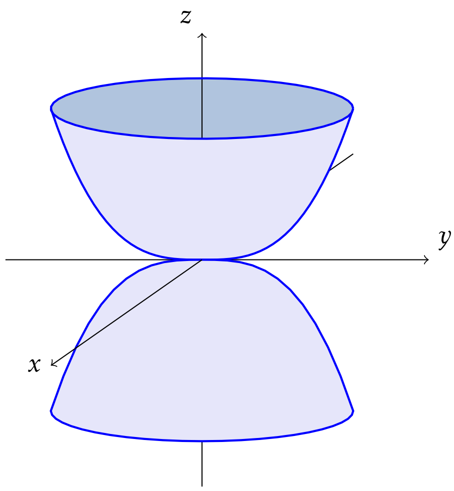
■ Surfaces de l'espace

• Définition paramétrique d'une surface

Une surface peut être définie par la donnée de trois fonctions $x : \mathcal{U} \to \mathbb{R}$, $y : \mathcal{U} \to \mathbb{R}$ et $z : \mathcal{U} \to \mathbb{R}$ fonctions définies sur une partie $\mathcal{U}$ de $\mathbb{R}^2$; le support de cette surface est alors l'ensemble :

$$\Big\{\big(x(u,v), y(u,v), z(u,v)\big) \;\Big|\; (u,v) \in \mathcal{U}\Big\}.$$

Exemple. $\begin{cases} x = u\cos(v) \\ y = u\sin(v) \\ z = u^3 \end{cases}$ pour $u \in [-1, 1]$ et $v \in [0, 2\pi]$.



Considérons la fonction $f : \mathcal{U} \to \mathbb{R}^3$ définie par : $f(u,v) = x(u,v)\vec{e_1} + y(u,v)\vec{e_2} + z(u,v)\vec{e_3}$; lorsque x, y et z sont de classe $\mathscr{C}^1$, il en est de même de f, et la formule de Taylor-Young s'écrit :

$$f(u+h, v+k) = f(u,v) + h\frac{\partial f}{\partial u}(u,v) + k\frac{\partial f}{\partial v}(u,v) + \mathrm{o}(\|(h,k)\|)$$

avec $\begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial u}(u,v) = \dfrac{\partial x}{\partial u}(u,v)\vec{e}_1 + \dfrac{\partial y}{\partial u}(u,v)\vec{e}_2 + \dfrac{\partial z}{\partial u}(u,v)\vec{e}_3 \\ \dfrac{\partial f}{\partial v}(u,v) = \dfrac{\partial x}{\partial v}(u,v)\vec{e}_1 + \dfrac{\partial y}{\partial v}(u,v)\vec{e}_2 + \dfrac{\partial z}{\partial v}(u,v)\vec{e}_3 \end{cases}$

En général, les vecteurs $\dfrac{\partial f}{\partial u}(u,v)$ et $\dfrac{\partial f}{\partial v}(u,v)$ sont linéairement indépendants ; on dit alors que le point correspondant est *régulier*. Dans ce cas, l'ensemble des points paramétrés par :

$$(h,k) \longmapsto f(u,v) + h\frac{\partial f}{\partial u}(u,v) + k\frac{\partial f}{\partial v}(u,v) \quad \text{avec} \quad (h,k) \in \mathbb{R}^2$$

est un plan, appelé *plan tangent* à la surface au point de paramétrage (u,v).

Exemple. Dans l'exemple précédent, $\dfrac{\partial f}{\partial u}(u,v) = \begin{pmatrix} \cos v \\ \sin v \\ 3u^2 \end{pmatrix}$ et $\dfrac{\partial f}{\partial v}(u,v) = \begin{pmatrix} -u\sin v \\ u\cos v \\ 0 \end{pmatrix}$.

On calcule : $\dfrac{\partial f}{\partial u}(u,v) \wedge \dfrac{\partial f}{\partial v}(u,v) = \begin{pmatrix} -3u^3\cos v \\ -3u^3 \sin v \\ u \end{pmatrix}$ donc lorsque $u \neq 0$, le point est régulier.

Remarque. Le vecteur $\dfrac{\partial f}{\partial u}(u,v) \wedge \dfrac{\partial f}{\partial v}(u,v)$ est un vecteur normal au plan tangent.

• **Nappes paramétrées**

Dans le cas particulier où $x(u,v) = u$ et $y(u,v) = v$ on obtient une paramétrisation de la forme : $z = \phi(x,y)$; la surface est alors appelée une *nappe* paramétrée.

Nous avons $f(x,y) = x\vec{e}_1 + y\vec{e}_2 + \phi(x,y)\vec{e}_3$ donc :

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \dfrac{\partial \phi}{\partial x}(x,y) \end{pmatrix}, \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \dfrac{\partial \phi}{\partial y}(x,y) \end{pmatrix}, \quad \frac{\partial f}{\partial x}(x,y) \wedge \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \begin{pmatrix} -\dfrac{\partial \phi}{\partial x}(x,y) \\ -\dfrac{\partial \phi}{\partial y}(x,y) \\ 1 \end{pmatrix}$$

tous les points d'une nappe paramétrée sont réguliers. En outre, le plan tangent au point de coordonnées $\big(x_0, y_0, \phi(_0, y_0)\big)$ a pour équation :

$$\begin{aligned} z &= \phi(x_0,y_0) + \mathrm{d}\phi(x_0,y_0).(x-x_0, y-y_0) \\ \iff z &= \phi(x_0,y_0) + (x-x_0)\frac{\partial \phi}{\partial x}(x_0,y_0) + (y-y_0)\frac{\partial \phi}{\partial y}(x_0,y_0) \end{aligned}$$

• **Surface définie implicitement**

Certaines surfaces sont définies implicitement par une ligne de niveau du type : $\mathrm{F}(x,y,z) = \lambda$.

À l'instar des coubres définies implicitement dans le plan, nous admettrons qu'en tout point (a,b,c) de la surface où il ne s'annule pas, le vecteur $\nabla\mathrm{F}(a,b,c)$ est un vecteur normal au plan tangent. Ce dernier aura donc pour équation :

$$(x-a)\frac{\partial \mathrm{F}}{\partial x}(a,b,c) + (y-b)\frac{\partial \mathrm{F}}{\partial y}(a,b,c) + (z-c)\frac{\partial \mathrm{F}}{\partial z}(a,b,c) = 0.$$

Exercice 12. On considère la surface d'équation : $xy = z^3$. Trouver les plans tangents qui contiennent la droite d'équations :

$$\begin{cases} x = 2 \\ y = 3z - 3 \end{cases}$$

4. Exercices

Topologie d'un espace vectoriel normé

Exercice 13 Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel normé.

a) Montrer que le seul sous-espace vectoriel ouvert de E est E lui-même.

b) Soit $\mathcal{O}$ un ouvert non vide de E. Montrer que $\mathrm{Vect}(\mathcal{O}) = \mathrm{E}$.

Exercice 14 Soient A et B deux parties d'un même espace vectoriel normé E de dimension finie. Montrer que

$$\mathring{A} \cup \mathring{B} \subset \overset{\circ}{\widehat{A \cup B}}, \qquad \mathring{A} \cap \mathring{B} = \overset{\circ}{\widehat{A \cap B}}, \qquad \overline{A \cap B} \subset \overline{A} \cap \overline{B}, \qquad \overline{A \cup B} = \overline{A} \cup \overline{B}.$$

Exercice 15 Soit A une partie d'un espace vectoriel normé E de dimension finie. Montrer que $\mathrm{Fr}(A) = \mathrm{Fr}(E \setminus A)$.

Exercice 16 Montrer que les seules parties à la fois ouvertes et fermées d'un espace vectoriel normé E sont E et $\varnothing$.

Exercice 17 On note $\Omega = \Big\{(x,y) \in \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \ \Big|\ (x,y) \text{ est libre}\Big\}$. Montrer que Ω est un ouvert

a) en montrant que son complémentaire est fermé ;

b) en utilisant le produit vectoriel.

Continuité

Exercice 18 Étudier les limites en $(0,0)$ des fonctions suivantes :

$$f(x,y) = \frac{x^2+xy+y^2}{x^2+y^2} \qquad f(x,y) = \frac{xy(x+y)}{x^2+y^2} \qquad f(x,y) = \frac{x+2y}{x^2-y^2} \qquad f(x,y) = \frac{1-\cos(xy)}{xy^2}.$$

Exercice 19 Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^2}{2} + y^2 - 1 & \text{si } x^2+y^2 > 1 \\ -\dfrac{x^2}{2} & \text{si } x^2+y^2 \leqslant 1 \end{cases}$. Montrer que f est continue.

Exercice 20 Soit C une partir convexe d'un espace vectoriel normé E, et $f : C \to \mathbb{R}$ une fonction continue. Soient a et b deux points de C, et y un réel vérifiant : $f(a) < y < f(b)$. Montrer qu'il existe $x \in C$ tel que $f(x) = y$.

Calcul différentiel

Exercice 21 Soit E un espace vectoriel euclidien, et $f : x \mapsto \|x\|$. En quels points cette application est-elle différentiable ? Préciser le vecteur gradient en ces points.

Exercice 22 Soit $E = \mathbb{R}_n[X]$ et $f : E \to \mathbb{R}$ définie par $f(P) = \displaystyle\int_0^1 P(t)^2 \, dt$. Montrer que f est de classe $\mathscr{C}^1$ et déterminer sa différentielle.

Exercice 23 Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par : $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{y^2}{x} & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$

Montrer que f admet en $(0,0)$ des dérivées partielles, mais que f n'est pourtant pas continue en ce point.

Exercice 24 Montrer que l'application $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par :

$$f(x,y) = \frac{x^2y^3}{x^2+y^2} \text{ si } (x,y) \neq (0,0) \quad \text{et} \quad f(0,0) = 0$$

est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$.

Exercice 25 Soit $\phi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathscr{C}^1$, et $f : \mathbb{R}^* \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $f(x,y) = \phi\left(\dfrac{y}{x}\right)$.
Montrer que f vérifie la relation : $x\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y) + y\dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 0$.

Exercice 26 Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ une application de classe $\mathscr{C}^1$.

a) On suppose que pour tout $t \in \mathbb{R}$, $f(x+t, y+t) = f(x,y)$. Montrer que $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y) + \dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 0$.

b) On suppose que pour tout $t > 0$, $f(tx, ty) = f(x,y)$. Montrer que $x\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y) + y\dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 0$.

Exercice 27 Déterminer la valeur maximale sur $\left[0, \dfrac{\pi}{2}\right]^2$ de $f : (x,y) \longmapsto \sin x \sin y \sin(x+y)$.

Exercice 28

a) Soient x, y et z trois nombres réels positifs. Montrer qu'il est possible de construire un triangle dont les côtés sont de longueurs respectives x, y et z si et seulement si :

$$x < y+z, \qquad y < z+x, \quad \text{et} \quad z < x+y.$$

b) Un triangle variable a un périmètre p imposé, ses côtés ont pour longueur x, y et z.
On pose $\mathrm{F}(x,y,z) = (x+y)^2 + (y+z)^2 + (z+x)^2$. Déterminer le triangle pour lequel $\mathrm{F}(x,y,z)$ est minimal, et donner la valeur de ce minimum.

Exercice 29 Déterminer le périmètre maximal d'un triangle inscrit dans un cercle de rayon R.

Exercice 30 Étant donné $(a,b,c) \in \mathbb{R}^3$ on considère l'équation aux dérivées partielles

$$a\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + b\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} + c\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 0$$

où la fonction f est supposée de classe $\mathscr{C}^2$ sur $\mathbb{R}^2$.

a) Transformer l'équation par le changement de variables $u = x + \alpha y$ et $v = x + \beta y$.

b) Lorsque $b^2 - 4ac > 0$ montrer qu'on peut intégrer l'équation.

Exercice 31 En utilisant les coordonnées polaires résoudre l'équation aux dérivées partielles suivante :

$$x\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) + y\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) + x^2 + y^2 = f(x,y).$$

Exercice 32 Soit $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ une application non nulle de classe $\mathscr{C}^1$.On dit que f est *homogène* s'il existe une application $\phi :]0, +\infty[\longrightarrow \mathbb{R}$ de classe $\mathscr{C}^1$ telle que :

$$(*) \qquad \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2,\ \forall \lambda > 0, \quad f(\lambda x, \lambda y) = \phi(\lambda) f(x,y).$$

a) Montrer que si f est homogène, il existe $\alpha \in \mathbb{R}$ tel que $\forall \lambda > 0$, $\phi(\lambda) = \lambda^\alpha$ (on pourra commencer par dériver l'égalité $(*)$ par rapport aux variables x, y puis λ).

b) Montrer alors que f est homogène si et seulement s'il existe $\alpha \in \mathbb{R}$ tel que :

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2,\ x\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) + y\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \alpha f(x,y).$$

c) Résoudre cette équation aux dérivées partielles à l'aide des coordonnées polaires.

Applications géométriques

Exercice 33 On considère la surface d'équation : $2(xz + yz) + x + 2y + z - 1 = 0$.
Déterminer son intersection avec son plan tangent en $(0,0,1)$.

Exercice 34 Soit $\mathscr{S}$ la surface d'équation cartésienne $z^2 - x^2 - y^2 = 1$.
On considère la droite $\mathscr{D}$ d'équations $(2x + y = 0,\ z = 0)$. Déterminer les points M de $\mathscr{S}$ tels que le plan tangent à $\mathscr{S}$ en M soit parallèle à $\mathscr{D}$.