

Fonctions de plusieurs variables

Calcul différentiel

Définition de la différentielle. Si \mathcal{U} est un ouvert, on dit que f admet une différentielle en $a \in \mathcal{U}$ lorsqu'il existe une application linéaire notée $df(a)$ telle que $f(a+h) = f(a) + df(a).h + o(\|h\|)$.

Définition du gradient $\nabla f(a)$ lorsque f est à valeurs réelles.

Dérivées partielles. Si f possède une différentielle en a , f admet en a des dérivées partielles, et $df(a).h = \sum_{k=1}^p \partial_k f(a) h_k$.

Si $f : \mathcal{U} \rightarrow \mathbb{R}$ admet en tout point de \mathcal{U} des dérivées partielles continues alors f admet en tout point une différentielle. On dit alors que f est de classe \mathcal{C}^1 (résultat admis).

Dérivées partielles d'ordre 2, théorème de Schwarz (résultat admis), matrice hessienne $H_f(a)$ pour une fonction à valeurs réelles.

Formule de Taylor-Young à l'ordre 2 : $f(a+h) = f(a) + \nabla f(a)^T .h + \frac{1}{2} h^T H_f(a) h + o(\|h\|^2)$.

Règle de la chaîne. Dérivation de $\phi(t) = f(x_1(t), \dots, x_p(t))$.

Application au calcul du gradient en coordonnées polaires, à la résolution d'équations aux dérivées partielles (on donne le changement de variable).

Extremum local. Si \mathcal{U} est ouvert et $f : \mathcal{U} \rightarrow \mathbb{R}$ est de classe \mathcal{C}^1 et possède un extremum local en $a \in \mathcal{U}$ alors $df(a) = 0$.

Condition suffisante d'extremum local (ou de non extremum) à l'aide des valeurs propres la matrice hessienne, lorsque celle-ci n'est pas dégénérée.

Extremum global. Si \mathcal{K} est fermé et borné, toute fonction continue $f : \mathcal{K} \rightarrow \mathbb{R}$ est bornée et atteint ses bornes.

Utilisation de ces deux résultats pour déterminer les extremums d'une fonction continue sur \mathcal{K} et de classe \mathcal{C}^1 sur $\overset{\circ}{\mathcal{K}}$.

Cette semaine de colle est la dernière de l'année. Je remercie les interrogateurs qui, une fois de plus, ont bien voulu m'assister dans cette tâche, et je vous donne rendez-vous à la fin de l'année scolaire pour la préparation aux oraux.