PC*

Semaine 18 du 10 au 14 février 2025

Espaces vectoriels normés

Normes et distances

Définition d'une norme, seconde inégalité triangulaire, cas des normes euclidiennes, distance associée à une norme.
Notion de sphère, boule ouverte, boule fermée associée à une norme.

Parties convexes. Les boules ouvertes et fermées sont convexes.

Normes équivalentes. On admet qu'en dimension finie toutes les normes sont équivalentes.

Suites bornées, suites convergentes

Définition d'une suite bornée, d'une suite convergente.
En présence d'une base, la convergence est équivalente à la convergence composante par composante.

Topologie d'un espace vectoriel normé

Définition d'un point intérieur, d'un point adhérent.
Caractérisation séquentielle d'un point adhérent.
Définition de l'intérieur, de l'adhérence, de la frontière d'une partie.
Parties ouvertes, parties fermées.

Continuité

Définition d'une limite, de la continuité en un point, d'une fonction $f : \mathcal{U} \subset \mathrm{E} \to \mathrm{F}$ où E et F sont des $\mathbb{K}$-espaces vectoriels de dimensions finies.
Caractérisation séquentielle d'une limite.
Relations de comparaison O et o.
Image réciproque d'un ouvert ou d'un fermé de $\mathbb{R}$ par une application continue.
Théorème de la borne atteinte lorsque l'ensemble de départ est un fermé borné (résultat admis).
Continuité des applications linéaires et des applications bilinéaires, ainsi que du déterminant.

Quelques exemples de questions de cours possibles (liste non exhaustive)

- Si deux normes sont équivalentes, une partie bornée pour l'une est bornée pour l'autre ;
- preuve de la caractérisation séquentielle d'un point adhérent ;
- toute boule ouverte (respectivement fermée) est ouverte (respectivement fermée) ;
- si $f : \mathrm{E} \to \mathbb{R}$ est continue, l'image réciproque d'un ouvert de $\mathbb{R}$ est un ouvert de E ;
- si $f : \mathrm{E} \to \mathbb{R}$ est continue, l'image réciproque d'un fermé de $\mathbb{R}$ est un fermé de E ;
- une application linéaire (en dimension finie) est lipschitzienne.

Prévision

Continuité et dérivabilité des fonctions vectorielles.

Exercices à préparer pour les séances de TD

Les exercices 6, 10, 13, 20 et 21 de la fiche « espaces vectoriels normés ».