PC* - 16

Semaine du 1er au 5 février 2021

Espaces euclidiens

Définition d'un produit scalaire dans un $\mathbb{R}$-espace vectoriel, inégalité de Cauchy-Schwarz, inégalité triangulaire, orthogonalité.
Bases orthonormées, expression du produit scalaire dans une telle base.

Projection orthogonale. Dans un espace de dimension *quelconque*, projection orthogonale sur un sous-espace vectoriel H de dimension *finie*. Deux définitions équivalentes sont à connaître :

- si $(e_1,\dots,e_k)$ est une base orthonormée de H, $p(x) = \displaystyle\sum_{k=1}^{k} \langle e_j \mid x\rangle e_j$;
- $p(x)$ est l'unique vecteur vérifiant $\begin{cases} p(x) \in \mathrm{H} \\ x - p(x) \in \mathrm{H}^{\perp} \end{cases}$

Orthonormalisation de Gram-Schmidt. Soit $(x_1,\dots,x_p)$ une famille libre. Il existe une unique famille orthonormée $(e_1,\dots,e_p)$ telle que : $\forall k \in [\![1,p]\!]$, $\mathrm{Vect}(x_1,\dots,x_k) = \mathrm{Vect}(e_1,\dots,e_k)$ et $\langle e_k \mid x_k\rangle > 0$. Construction effective.

Prévision

Endomorphismes d'un espace euclidien : isométries vectorielles et endomorphismes symétriques.

Quelques exemples de questions de cours possibles (liste non exhaustive)

- Preuve de l'inégalité de Cauchy-Schwarz ;
- existence de bases orthonormées en dimension finie ;
- Toute forme linéaire d'un espace euclidien s'écrit $x \longmapsto \langle a \mid x\rangle$ avec a unique ;
- définition d'une projection orthogonale sur un sous-espace vectoriel de dimension finie ;
- orthonormalisation de Gram-Schmidt.