PC* - 13

Semaine du 11 au 15 janvier 2021

Espaces probabilisés

Ensembles dénombrables. Définition d'un ensemble dénombrable.
Toute partie d'un ensemble dénombrable est finie ou dénombrable.
La réunion et le produit cartésien d'un ensemble dénombrable et d'un ensemble fini ou dénombrable est dénombrable.
Si $\{x_i \mid i \in I\}$ est un ensemble dénombrable de réels positifs, définition de $\sum_{i \in I} x_i \in \mathbb{R}_+ \cup \{+\infty\}$.

Tribus et probabilités. Définition d'une tribu (contient l'univers Ω, est stable par complémentaire et union dénombrable), propriétés usuelles des tribus.
Définition d'une probabilité sur une tribu, propriétés usuelles des probabilités.
Théorème de la limite monotone, propriété de sous-additivité.

Cas d'un univers dénombrable. Définition d'une probabilité sur $\mathscr{P}(\Omega)$ à partir des singletons.

Conditionnement en indépendance. Notion de probabilité conditionnelle, formule des probabilités composées.
Notion de système complet d'événements, formule des probabilités totales. Formule de Bayes.
Indépendance de deux événements, indépendance d'une famille finie ou dénombrable d'événements.

Prévision

Variables aléatoires.

Quelques exemples de questions de cours possibles (liste non exhaustive)

- énoncé et preuve du théorème de la limite monotone ;
- si $\Omega = \{\omega_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ est dénombrable et si (p_n) est une suite de réels positifs telle que $\sum p_n = 1$, il existe une unique probabilité $\mathbb{P}$ sur $\mathscr{P}(\Omega)$ telle que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\mathbb{P}(\omega_n) = p_n$;
- énoncé et preuve de la formule de Bayes ;
- si A et B sont deux événements indépendants, il en est de même de $\overline{A}$ et B.