PC* - 10

# Semaine du 7 au 11 décembre 2020

## Intégration sur un intervalle

Soit $f : [a,b[ \to \mathbb{K}$ une fonction continue par morceaux. On dit que l'intégrale $\displaystyle\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$ est *convergente* lorsque la limite : $\displaystyle\lim_{x\to b x<b} \int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t$ existe. Cas des intervalles $]a,b]$ et $]a,b[$.
Pratique du changement de variable et de l'intégration par partie.

**Fonctions à valeurs positives.** Théorèmes de comparaison (majoration, domination, équivalence). Intégrales de référence à connaître : $\displaystyle\int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{t^\alpha}$, $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{t^\alpha}$, $\displaystyle\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-\alpha t}\,\mathrm{d}t$.

**Absolue convergence.** Définition de l'absolue convergence, de la semi-convergence. Toute intégrale absolument convergente est convergente. Notion de fonction intégrable sur un intervalle.
Exemple de l'intégrale de Dirichlet semi-convergente $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t}\,\mathrm{d}t = \frac{\pi}{2}$ (valeur admise).

**Espaces $\mathcal{L}^1$ et $\mathcal{L}^2$.** On pose $\mathcal{L}^1(\mathrm{I},\mathbb{K}) = \left\{ f \in \mathscr{C}^0_{pm}(\mathrm{I},\mathbb{K}) \,\middle|\, f \text{ est intégrable} \right\}$ et $\mathcal{L}^2(\mathrm{I},\mathbb{K}) = \left\{ f \in \mathscr{C}^0_{pm}(\mathrm{I},\mathbb{K}) \,\middle|\, f^2 \text{ est intégrable} \right\}$.
Il s'agit de deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels, et $(f,g) \in \mathcal{L}^2(\mathrm{I},\mathbb{K}) \Longrightarrow fg \in \mathcal{L}^2(\mathrm{I},\mathbb{K})$.
Inégalité de Cauchy-Schwarz dans $\mathcal{L}^2(\mathrm{I},\mathbb{K})$.

### Prévision

Théorèmes de convergence dominée.