Semaine du 23 au 27 novembre 2020

Séries entières

Définition d'une série entière d'une variable complexe $\sum a_n z^n$, $z \in \mathbb{C}$.

Lemme d'Abel. Soit $z_0 \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ tel que la suite $(a_n z_0^n)$ soit bornée. Alors pour tout $z \in \mathbb{C}$ tel que $|z| < |z_0|$ la série $\sum a_n z^n$ est absolument convergente.
Définition du rayon de convergence : $\mathrm{R}_a = \sup\left\{\rho \in \mathbb{R}_+ \;\middle|\; \text{la suite } (a_n \rho^n) \text{ est bornée}\right\} \in \mathbb{R}_+ \cup \{+\infty\}$.
Utilisation de la règle de d'Alembert pour calculer un rayon de convergence.
Comparaison du rayon de convergence de deux séries entières : si $a_n = \mathrm{O}(b_n)$ alors $\mathrm{R}_b \leqslant \mathrm{R}_a$.

Opérations algébriques sur les séries entières. Rayon de convergence de la somme de deux séries entières, du produit de deux séries entières ; rayon de convergence de la série dérivée.

Séries entières d'une variable réelle. Convergence normale sur tout segment inclus dans l'intervalle ouvert de convergence.

La fonction somme S est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur l'intervalle $]-\mathrm{R}, \mathrm{R}[$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $a_n = \dfrac{\mathrm{S}^{(n)}(0)}{n!}$.
En conséquence, deux séries entières dont les sommes coïncident au voisinage de 0 sont égales.

Développement en série entière. Définition et développements usuels :

$$e^x, \quad e^{-x}, \quad \mathrm{ch}(x), \quad \mathrm{sh}(x), \quad \cos(x), \quad \sin(x), \quad \frac{1}{1-x}, \quad \frac{1}{1+x}, \quad \ln(1-x), \quad \ln(1+x), \quad \arctan(x), \quad (1+x)^\alpha.$$

Toute fonction développable en série entière au voisinage de l'origine possède un développement limité à tout ordre obtenu en tronquant la série entière.

Séries géométrique et exponentielle d'une variable complexe. Développement en série entière de e^z ($z \in \mathbb{C}$) et $\dfrac{1}{1-z}$ ($|z| < 1$).

Prévision

Intégration : révision du cours de première année.

Quelques exemples de questions de cours possibles (liste non exhaustive)

- preuve du lemme d'Abel ;
- $|z| < \mathrm{R}_a \Longrightarrow \sum a_n z^n$ converge absolument, et $|z| > \mathrm{R}_a \Longrightarrow \sum a_n z^n$ diverge grossièrement ;
- Si $a_n \sim b_n$ alors $\mathrm{R}_a = \mathrm{R}_b$.
- rayon de convergence de la série dérivée.
- la fonction somme d'une série entière est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur l'intervalle ouvert de convergence ;
- deux séries entières dont les sommes coïncident sont égales ;
- obtention des développements usuels.