

Semaine 5 du 14 au 18 octobre 2024

Espaces préhilbertiens réels

Définition d'un produit scalaire dans un \mathbb{R} -espace vectoriel, inégalité de Cauchy-Schwarz, inégalité triangulaire, orthogonalité.

Bases orthonormées, expression du produit scalaire dans une telle base.

Projection orthogonale. Dans un espace de dimension *quelconque*, projection orthogonale sur un sous-espace vectoriel H de dimension *finie*. Deux définitions équivalentes sont à connaître :

- si (e_1, \dots, e_k) est une base orthonormée de H , $p(x) = \sum_{j=1}^k \langle e_j | x \rangle e_j$;
- $p(x)$ est l'unique vecteur vérifiant $\begin{cases} p(x) \in H \\ x - p(x) \in H^\perp \end{cases}$

Orthonormalisation de Gram-Schmidt. Soit (x_1, \dots, x_p) une famille libre. Il existe une unique famille orthonormée (e_1, \dots, e_p) telle que : $\forall k \in \llbracket 1, p \rrbracket$, $\text{Vect}(x_1, \dots, x_k) = \text{Vect}(e_1, \dots, e_k)$ et $\langle e_k | x_k \rangle > 0$. Construction effective.

Isométries vectorielles. Préservation du produit scalaire, de la norme, exemple des symétries orthogonales, des réflexions. Interprétation matricielle : le groupe $\mathcal{O}_n(\mathbb{R})$.

Orientation de l'espace : le groupe $\mathcal{SO}_n(\mathbb{R})$.

Étude des isométries vectorielles du plan (rotations et symétries orthogonales).

Prévision

Endomorphismes autoadjoints.

Quelques exemples de questions de cours possibles (liste non exhaustive)

- Preuve de l'inégalité de Cauchy-Schwarz;
- existence de bases orthonormées en dimension finie;
- Toute forme linéaire d'un espace euclidien s'écrit $x \mapsto \langle a | x \rangle$ avec a unique;
- définition d'une projection orthogonale sur un sous-espace vectoriel de dimension finie;
- orthonormalisation de Gram-Schmidt;

Exercices à préparer pour les séances de TD

Les exercices 12, 13, 15, 19, 20 de la fiche « Espaces euclidiens ».