PC* - 2

Semaine du 28 au 2 octobre 2020

Espaces vectoriels et applications linéaires

Même programme que la semaine dernière.

Réduction des endomorphismes

Valeurs et vecteurs propres, sous-espaces propres.

Polynôme caractéristique. Lien entre multiplicité des valeurs propres et dimension des sous-espaces propres. Expression du déterminant et de la trace en fonction des valeurs propres lorsque le polynôme caractéristique est scindé.

Endomorphismes diagonalisables. Différentes caractérisations des endomorphismes diagonalisables par le biais des sous-espaces propres :

- existence d'une base formée de vecteurs propres ;
- la somme des sous-espaces propres est égale à E ;
- la somme des dimensions des sous-espaces propres est égale à la dimension de E ;
- le polynôme caractéristique est scindé et la dimension des sous-espaces propres est égale à la multiplicité des valeurs propres associées.

Projecteurs spectraux d'un endomorphisme diagonalisable. Lorsque P est un polynôme, expression de $P(u)$ en fonction des valeurs propres et des projecteurs spectraux.

Commutant d'un endomorphisme diagonalisable. Si u est diagonalisable, les endomorphismes qui commutent avec u sont ceux qui laissent stables les sous-espaces propres.

Endomorphismes trigonalisables. Lorsque le polynôme caractéristique de u est scindé il existe une base de E pour laquelle la matrice associée à u est triangulaire supérieure.

Prévision

La même chose, avec en complément l'étude des récurrences linéaires à coefficients constants.

Quelques exemples de questions de cours possibles (liste non exhaustive)

- la somme des sous-espaces propres est directe ;
- la dimension d'un sous-espace propre est inférieure ou égale à l'ordre de multiplicité de la valeur propre ;
- si $\dim E = p$ et si u possède p valeurs propres distinctes, alors u est diagonalisable ;
- définition des projecteurs spectraux, expression de u^n ou de $P(u)$ en fonction de ceux-ci ;
- description justifiée du commutant d'un endomorphisme diagonalisable ;
- si le polynôme caractéristique est scindé l'endomorphisme est trigonalisable.