PC* - 1

Semaine du 21 au 25 septembre 2020

Espaces vectoriels et applications linéaires

Produit cartésien de deux espaces vectoriels.

Somme de sous-espaces vectoriels. Définition, sommes directes, sous-espaces supplémentaires. Exemple de la division euclidienne.

Projections vectorielles. Famille de projecteurs associée à une somme directe $E = H_1 \oplus H_2 \oplus \cdots \oplus H_p$.

Familles libres, génératrices, bases d'un espace vectoriel. Base adaptée à un sous-espace vectoriel, base adaptée à une décomposition de l'espace en somme directe.

Représentation matricielle. Matrice associée à un vecteur, à une famille de vecteurs. Matrice de passage entre deux bases, matrice associée à une application linéaire.
Formule de changement de base pour les vecteurs, les applications linéaires, les endomorphismes.

Trace. D'une matrice et d'un endomorphisme.

Base canonique de $\mathcal{M}_{np}(\mathbb{K})$.

Théorème du rang. Si $u \in \mathcal{L}(E, F)$ une application linéaire et H un supplémentaire de $\operatorname{Ker} u$, la restriction de u à H réalise un isomorphisme entre H et $\operatorname{Im} u$.
On en déduit lorsque E est de dimension finie : $\dim E = \dim(\operatorname{Ker} u) + \dim(\operatorname{Im} u)$.

Interpolation de Lagrange. Base de Lagrange de $\mathbb{K}_n[X]$, décomposition d'un polynôme dans cette base. Résolution du problème d'interpolation de Lagrange.

Sous-espaces stables. Matrice dans une base adaptée.

Déterminant. D'une matrice, d'une famille de n vecteurs dans une base (e) de cardinal n, d'un endomorphisme.
Caractérisation des bases, des automorphismes.
Calcul d'un déterminant par opérations élémentaires, développement par rapport à une ligne, une colonne.
Déterminant d'une matrice définie par blocs.
Exemple des matrices tri-diagonales ; déterminant de Vandermonde.

Quelques exemples de questions de cours possibles (liste non exhaustive)

- montrer que la somme $H_1 + H_2$ est directe si et seulement si $H_1 \cap H_2 = \{0_E\}$;
- montrer que p est une projection vectorielle si et seulement si $p \circ p = p$;
- établir la formule de changement de base pour les vecteurs ;
- définir la trace d'un endomorphisme ;
- preuve du théorème du rang ;
- les polynômes de Lagrange constituent une base de $\mathbb{K}_n[X]$;
- existence et unicité de la solution à un problème d'interpolation.
- déterminant de Vandermonde.

Prévision

Réduction des endomorphismes.