Énoncé des exercices

Exercice 1 Pour les simulations informatiques sous Python, on importera les bibliothèques scientifiques à l'aide des instructions suivantes :

```
import numpy as np
import numpy.linalg as alg
```

Soit $(a_k)_{1\leqslant k\leqslant n} \in \mathbb{R}^n$. On considère la matrice $\mathrm{A}(a_1,\ldots,a_n)$ suivante :

$$\mathrm{A} = \begin{pmatrix} 0 & a_1 & a_2 & \cdots & a_{n-1} & a_n \\ a_1 & 0 & a_2 & \cdots & a_{n-1} & a_n \\ a_1 & a_2 & 0\cdots & a_{n-1} & a_n & \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_1 & a_2 & a_3 & \cdots & a_n & 0 \end{pmatrix}$$

1. On suppose dans cette question que $n = 4$.

   a) Écrire une fonction Python de paramètre (a,b,c,d) qui calcule la matrice $\mathrm{A}(a,b,c,d)$.

   b) Donner les valeurs propres des matrices $\mathrm{A}(1,2,3,4)$, $\mathrm{A}(4,3,2,1)$ et $\mathrm{A}(-3,-1,1,2)$.
   En déduire une conjecture sur les valeurs propres de la matrice $\mathrm{A}(a,b,c,d)$.

   c) Donner les vecteurs propres des matrices $\mathrm{A}(1,2,3,4)$, $\mathrm{A}(4,3,2,1)$ et $\mathrm{A}(-3,-1,1,2)$. On pourra faire des rapports des coordonnées d'un vecteur pour l'identifier. Que peut-on dire dans ces trois cas ?

2. Montrer les conjectures dans le cas général.

3. On suppose que les réels $(a_k)_{1\leqslant k\leqslant n}$ sont strictement positifs et que $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} a_k = 1$. Que peut-on dire de la suite $\Big(\mathrm{A}(a_1,\ldots,a_n)^m\Big)_{m\in\mathbb{N}}$?

Exercice 2 Soit $(\Omega,\mathscr{A},\mathbb{P})$ un espace probabilisé, $(\epsilon_n)_{n\geqslant 1}$ une suite de variables aléatoires indépendantes à valeurs dans $\{-1,1\}$ avec $\mathbb{P}(\epsilon_n = 1) = \mathbb{P}(\epsilon_n = -1) = 1/2$ pour tout $n \geqslant 1$.

On pose pour tout $n \geqslant 1$, $\mathrm{X}_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{\epsilon_k}{2^k}$.

Pour X variable aléatoire avec $\mathrm{X}(\Omega)$ fini on note pour tout $t \in \mathbb{R}$, $\Phi_{\mathrm{X}}(t) = \mathbb{E}\big(\mathrm{e}^{it\mathrm{X}}\big)$.

1. Justifier que pour tout $n \geqslant 1$, $\mathbb{P}\big(\mathrm{X}_n \in [-1,1]\big) = 1$.

2. Pour $n \geqslant 1$, soit $(\mathrm{X}_{n,k})_{k\geqslant 1}$ une suite de variables aléatoires indépendantes et de même loi que X_n. Justifier que pour tout $t \in \mathbb{R}$,
$$\forall \epsilon > 0, \qquad \mathbb{P}\left(\left|\frac{1}{\mathrm{N}}\sum_{k=1}^{\mathrm{N}} \cos(t\mathrm{X}_{n,k}) - \mathbb{E}\big(\cos(t\mathrm{X}_n)\big)\right| \geqslant \epsilon\right) \underset{\mathrm{N}\to+\infty}{\longrightarrow} 0$$

3. On fixe $\mathrm{N} = 1000$. Représenter sur une même figure, pour $n \in [\![3,10]\!]$, le graphe de $t \mapsto \dfrac{1}{\mathrm{N}}\displaystyle\sum_{k=1}^{\mathrm{N}} \cos\big(t\mathrm{X}_{n,k}(\omega)\big)$ sur $[-10,10]$, avec $\omega \in \Omega$. Que peut-on conjecturer ?

4. Déterminer une expression de $\Phi_{\mathrm{X}_n}(t)$ pour tout $n \geqslant 1$ et t réel.

5. Représenter simultanément les graphes Φ_{X_n} pour $n \in [\![3,10]\!]$ sur $[-10,10]$. Que peut-on conjecturer ?

6. Pour $n \geqslant 1$ et t réel, en considérant $\sin(t/2^n)\Phi_{\mathrm{X}_n}(t)$, déterminer une expression simple de $\Phi_{\mathrm{X}_n}(t)$ puis montrer la conjecture précédente.

7. Justifier que X_n et $-\mathrm{X}_n$ ont même loi pour tout $n \geqslant 1$.

8. En déduire une démonstration du résultat conjecturé à la question 3.

9. À l'aide des résultats précédemment obtenus, déterminer $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \mathbb{E}\big(\mathrm{X}_n \sin(t\mathrm{X}_n)\big)$ pour tout t réel puis le vérifier par simulation.

Exercice 3 On définit la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de fonctions de $[0,1]$ dans $\mathbb{R}$ par

$$\forall x \in [0,1], \qquad f_0(x) = 1 \quad \text{et pour } n \in \mathbb{N}, \quad f_{n+1}(x) = 2\int_0^x \sqrt{f_n(t)}\,\mathrm{d}t$$

1. Pour $x \in [0,1]$, calculer $f_1(x)$ et $f_2(x)$.
   Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $f_n(x)$ s'écrit sous la forme $\alpha_n x^{\beta_n}$.
   Déterminer des relations de récurrence pour α_n et β_n.
2. Calculer β_n pour $n \in \mathbb{N}^*$. En déduire la limite de β_n.
3. Écrire une fonction `alpha(n)` qui renvoie α_n.
   Représenter graphiquement les termes de la suite $(\alpha_n)_{n\in[\![1,20]\!]}$.
   Conjecturer la limite de α_n.
4. Représenter graphiquement les fonctions $(f_n)_{n\in[\![1,20]\!]}$. Qu'observez-vous ?
5. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\ln(\alpha_n) = -\displaystyle\sum_{k=1}^{n} 2^{-k+1}\ln(1 - 2^{-n-1+k})$.
   En déduire que la suite (α_n) converge. Calculer sa limite.
6. Montrer que (f_n) converge uniformément sur $[0,1]$.