Travaux dirigés

Topologie et continuité

Exercice 1 Justifier que $\mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ est une partie fermée et bornée de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

Exercice 2 On suppose que A est une partie convexe d'un espace vectoriel normé E.

a) Montrer que $\overline{\mathrm{A}}$ est convexe.

b) Montrer que $\mathring{\mathrm{A}}$ est convexe.

Exercice 3 Soit A une partie non vide de E, et $x \in \mathrm{E}$. On pose $\mathrm{d}(x, \mathrm{A}) = \inf\left\{\|x - a\| \;\middle|\; a \in \mathrm{A}\right\}$.

a) Justifier que si A est fermé et borné, il existe pour tout $x \in \mathrm{E}$ un point $a_0 \in \mathrm{A}$ tel que $\|x - a_0\| = \mathrm{d}(x, \mathrm{A})$, puis montrer que cette propriété reste vraie lorsqu'on suppose uniquement A fermé.

b) Soient A et B deux parties fermées d'un même espace vectoriel normé E tels que $\mathrm{A} \cap \mathrm{B} = \varnothing$. Montrer qu'il existe deux ouverts U et V tels que $\mathrm{A} \subset \mathrm{U}$, $\mathrm{B} \subset \mathrm{V}$ et $\mathrm{U} \cap \mathrm{V} = \varnothing$.

Exercice 4 Soit E un espace vectoriel normé de dimension finie, et A une partie fermée et bornée de E. Montrer l'existence de $(a, b) \in \mathrm{A}^2$ tels que pour tout $(x, y) \in \mathrm{A}^2$, $\|x - y\| \leqslant \|a - b\|$.

Exercice 5 Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ une fonction continue et $\mathcal{C}$ un cercle de centre $\mathrm{O} = (0, 0)$ et de rayon r.

a) Montrer qu'il existe deux points A et B diamétralement opposés de $\mathcal{C}$ tels que $f(\mathrm{A}) = f(\mathrm{B})$.

b) Montrer qu'il existe deux points C et D de $\mathcal{C}$, se déduisant l'un de l'autre par un quart de tour, tels que $f(\mathrm{C}) = f(\mathrm{D})$.

Exercice 6 Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel normé de dimension finie et $f : \mathrm{E} \to \mathrm{E}$ une fonction k-lipschitzienne avec $k \in]0, 1[$.

a) Soit (x_n) une suite de E telle que que la série $\sum \|x_n\|$ converge. Justifier que la série $\sum x_n$ converge.

b) Soit (x_n) une suite définie par la donnée de $x_0 \in \mathrm{E}$ et la relation $x_{n+1} = f(x_n)$. Montrer que la suite (x_n) converge (utiliser la question précédente).

c) En déduire que f possède un unique point fixe.

Exercice 7 Soit E un espace vectoriel normé de dimension finie, et A une partie fermée et bornée de E. On considère une fonction k-lipschitzienne $f : \mathrm{A} \to \mathrm{A}$ avec $k \in]0, 1[$.
Montrer que f possède un unique point fixe.

Exercice 8 Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une application de classe $\mathscr{C}^1$. On définit $g : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ en posant

$$g(x, y) = \begin{cases} \dfrac{f(x) - f(y)}{x - y} & \text{si } x \neq y \\ f'(x) & \text{si } x = y \end{cases}$$

Montrer que g est continue.