Travaux dirigés

Suites de fonctions

Exercice 1 Étudier la convergence simple et uniforme sur l'intervalle $\mathrm{I} = [0, +\infty[$ de la suite de fonctions (f_n), avec :

a) $f_n : x \mapsto \dfrac{x}{x^2+n}$; *b)* $f_n : x \mapsto x\,\mathrm{e}^{-x/n}$; *c)* $f_n : x \mapsto n^2 x\,\mathrm{e}^{-nx}$; *d)* $f_n : x \mapsto \mathrm{e}^{-nx}\sin(nx)$.

Le cas échéant, on précisera des intervalles $\mathrm{J} \subset \mathrm{I}$ sur lesquels la convergence est uniforme.

Exercice 2 Étudier la convergence simple et uniforme sur $[0, +\infty[$ de la suite de fonctions (f_n) définie par $f_n(x) = \dfrac{x^n\,\mathrm{e}^{-x}}{n!}$.

Pour les 5/2 : calculer ensuite $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \int_0^{+\infty} f_n(t)\,\mathrm{d}t$ et $\displaystyle\int_0^{+\infty} \lim_{n\to+\infty} f_n(t)\,\mathrm{d}t$.

Exercice 3 Étudier la convergence uniforme sur $]0, +\infty[$ de la suite de fonctions (f_n) définie par :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \forall x > 0, \quad f_n(x) = \min\Big(n, \frac{1}{\sqrt{x}}\Big).$$

Exercice 4 Soit $h : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ une fonction continue, non identiquement nulle, telle que $h(0) = 0$ et $\lim\limits_{+\infty} h(x) = 0$. On définit les suites de fonctions (f_n) et (g_n) en posant : $f_n(x) = h(nx)$ et $g_n(x) = h(x/n)$.

a) Étudier la convergence simple sur $\mathbb{R}_+$ des suites de fonctions (f_n) et (g_n).

b) La convergence est-elle uniforme sur $\mathbb{R}_+$?

c) Sur quels intervalles y-a-t'il convergence uniforme ?

Exercice 5 Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathscr{C}^2$ telle que f'' soit bornée. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ on définit la fonction $u_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ en posant : $\forall x \in \mathbb{R}$, $u_n(x) = \dfrac{n}{2}\Big(f\Big(x + \dfrac{1}{n}\Big) - f\Big(x - \dfrac{1}{n}\Big)\Big)$.

a) Montrer que la suite de fonctions (u_n) converge simplement vers une fonction à préciser.

b) Montrer que la convergence est uniforme sur $\mathbb{R}$.