Travaux dirigés

Séries numériques

Exercice 1 Étude de convergence

Étudier la convergence des séries de terme général :

$$u_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n - \mathrm{e} \qquad u_n = (\operatorname{ch} n)^\alpha - (\operatorname{sh} n)^\alpha \text{ avec } \alpha > 0 \qquad u_n = \arccos\left(\frac{n^3+1}{n^3+2}\right)$$

Exercice 2 Développement limité

Pour quelles valeurs de $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ la série de terme général $u_n = \ln(n) + a\ln(n+1) + b\ln(n+2)$ est-elle convergente ? Calculer dans ce cas la somme de cette série.

Exercice 3 Comparaison à une intégrale

Par comparaison à une intégrale, donner un équivalent des sommes : $\displaystyle\sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{\sqrt{k}}$ et $\displaystyle\sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k\ln k}$.

Exercice 4 Fonction zeta de Riemann

Pour $x > 1$ on pose $\zeta(x) = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^x}$. En comparant $\zeta(x)$ à une intégrale calculer $\displaystyle\lim_{x\to 1^+} (x-1)\zeta(x)$.

Exercice 5 On pose $u_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{2n} (-1)^k \sqrt{k}$. Donner un équivalent de u_n lorsque n tend vers $+\infty$.

Indication. Regrouper les termes deux par deux puis comparer à une intégrale.

Exercice 6 Étude de convergence

Étudier la convergence des séries de terme général :

$$u_n = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n^2+n}} \qquad u_n = \sqrt{1+\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}} - 1 \qquad u_n = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n^\alpha + (-1)^n}} \text{ avec } \alpha > 0 \qquad u_n = \frac{(-1)^n}{n^{3/4} + \cos(n)} \qquad u_n = \frac{(-1)^n n^{1/n}}{\ln n}$$

Exercice 7 Soit (u_n) une suite réelle positive décroissante, telle que $\sum u_n$ converge.

a) Montrer que $\lim nu_n = 0$. **Indication**. Encadrer grossièrement $\displaystyle\sum_{k=n+1}^{2n} u_k$.

b) Montrer que la série $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} n(u_n - u_{n+1})$ converge et a même somme que $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} u_n$.

c) *Application*. Calculer pour $0 \leqslant r < 1$ la somme $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} nr^n$.

Exercice 8 Presque un télescopage

Soit une suite (u_n) telle que la série $\sum nu_n$ converge. Montrer que la série $\sum u_n$ converge.

Indication. Poser $S_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} ku_k$ et exprimer u_n à l'aide des termes de la suite (S_n).

Exercice 9 Produit de Cauchy

Soit $a \in [0,1[$. Écrire $\dfrac{1}{(1-a)^2}$ comme produit de deux séries, et en déduire la somme de la série $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} na^n$. Calculer par la même méthode $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} n^2a^n$.

Exercice 10 Soit σ une bijection de $\mathbb{N}^*$ dans $\mathbb{N}^*$.

a) Montrer que $\sum \frac{1}{\sigma(n)^2}$ converge.

b) Montrer que $\sum \frac{1}{\sigma(n)}$ diverge.

Soit σ une bijection de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{N}$, et $\sum a_n$ une série absolument convergente.

c) Montrer que $\sum a_{\sigma(n)}$ converge absolument.

d) Montrer que $\sum_{n=0}^{+\infty} a_{\sigma(n)} = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n$.