Travaux dirigés

Séries de fonctions

Exercice 1 Soit (a_n) une suite décroissante à valeurs positives, et $f_n : x \mapsto a_n x^n(1-x)$.

a) Montrer que la série de fonctions $\sum f_n$ converge simplement sur $[0,1]$.

b) Montrer que la convergence de $\sum f_n$ est normale sur $[0,1]$ si et seulement si la série numérique $\sum \frac{a_n}{n}$ converge.

c) Montrer que la convergence de $\sum f_n$ est uniforme sur $[0,1]$ si et seulement si la suite (a_n) converge vers 0.

Exercice 2 Soit a un réel fixé dans $]-1,1[$. On pose sous réserve de convergence $f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{a^n \cos(nx)}{n}$.

a) Montrer que f est définie et de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}$.

b) En déduire une expression simple de $f'(x)$ puis de $f(x)$. On admettra que $f(0) = -\ln(1-a)$.

c) En déduire la valeur de l'intégrale $\int_0^\pi \ln(a^2 - 2a\cos(x) + 1)\,\mathrm{d}x$.

Exercice 3 On pose sous réserve de convergence : $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \mathrm{e}^{-n^2x^2}$.

a) Déterminer le domaine de définition de f et de continuité de f.

b) Déterminer la limite en 0 de $xf(x)$.

Exercice 4 On pose sous réserve de convergence $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n!(x+n)}$.

a) Prouver que f est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $]0,+\infty[$.

b) Montrer que la quantité $xf(x) - f(x+1)$ est constante sur $]0,+\infty[$.

c) Donner des équivalents en 0 et $+\infty$ de $f(x)$.

d) Tracer la courbe représentative de f sur $]0,+\infty[$.

Exercice 5 On pose sous réserve de convergence $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{x(x+1)\cdots(x+n)}$.

a) Établir l'existence et la continuité de f sur $]0,+\infty[$.

b) Calculer $f(x+1)$ en fonction de $f(x)$.

c) Tracer la courbe représentative de f sur $]0,+\infty[$.

Exercice 6 On pose sous réserve de convergence $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \big(\arctan(x+n) - \arctan(n)\big)$.

a) Établir l'existence et la continuité de f sur $\mathbb{R}$.

b) Chercher une relation simple liant $f(x)$ et $f(x+1)$.

c) Trouver $\lim_{x \to +\infty} f(x)$.