

Séries entières

Exercice 1 Trouver le rayon de convergence de la série entière $\sum a_n z^n$ lorsque :

$$a_n = \frac{n^n}{n!} \quad a_n = n^{(-1)^n} \quad a_n = \frac{1 \times 4 \times 7 \times \dots \times (3n-2)}{n!} \quad a_n = e^{\sqrt{n}} \quad a_n = \binom{kn}{n} \text{ (avec } k \in \mathbb{N}^*)$$

Exercice 2 Soit $\sum a_n z^n$ une série entière de rayon de convergence $R > 0$. Déterminer le rayon de convergence de la série entière $\sum \frac{n! a_n}{n^n} z^n$.

Exercice 3 On suppose que les séries $\sum a_{2n} z^n$ et $\sum a_{2n+1} z^n$ ont pour rayons de convergences respectifs R_p et R_i . Déterminer le rayon de convergence de $\sum a_n z^n$.

Exercice 4 Développer en série entière les fonctions suivantes :

$$f(x) = \int_x^{2x} e^{-t^2} dt \quad f(x) = x \ln(x + \sqrt{x^2 + 1}) \quad f(x) = \ln(\sqrt{1 - 2x \operatorname{ch} a + x^2}) \quad f(x) = \arctan(x + 1)$$

Exercice 5 Développer en série entière la fonction $f(x) = \frac{e^x}{1-x}$ et en déduire le développement de $g(x) = \frac{e^{x^2}}{1-x}$.

Exercice 6 Développer en série entière $f(x) = \frac{x}{1-x-x^2}$ en exploitant la relation $(1-x-x^2)f(x) = x$.

Exercice 7 Calculer les sommes suivantes :

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\operatorname{ch}(na)}{n} x^n \quad \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{(2n)!} \quad \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n!} \int_1^x (\ln t)^n dt$$

Exercice 8 On considère la fonction $f :]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[\rightarrow \mathbb{R}$ définie par $f(x) = \frac{1}{\cos x}$. On suppose l'existence de $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$ tel que f soit développable en série entière sur $]-\alpha, \alpha[: f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{a_n}{(2n)!} x^{2n}$.

Montrer que pour tout $n \geq 1$ on a $a_n = (-1)^{n+1} \sum_{k=0}^{n-1} (-1)^k \binom{2n}{2k} a_k$.

Exercice 9 Soit E un ensemble de cardinal n . On appelle *dérangement* de E une permutation sans point fixe, et on note d_n le nombre de ces dérangements, avec la convention $d_0 = 1$.

a) Montrer que $\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} d_k = n!$.

b) On pose $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{d_n}{n!} x^n$. Montrer que le rayon de convergence est au moins égal à 1, calculer $e^x f(x)$ et en déduire $f(x)$.

c) Prouver alors que $d_n = n! \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k}{k!}$.