Travaux dirigés

Réduction des endomorphismes

Exercice 1 Soit $C = \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, et $M = CC^T$.

Quel est le rang de M ? En déduire le polynôme caractéristique de M. Cette matrice est-elle diagonalisable ?

Exercice 2 Soit $A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & \cdots & n \\ 1 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & n \\ 1 & \cdots & n-1 & 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ (on a $a_{ij} = j$ si $i \neq j$ et $a_{ii} = 0$).

a) Montrer que $\lambda \in \mathrm{Sp}(A) \iff \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{k}{\lambda + k} = 1$.

b) A est-elle diagonalisable ?

Exercice 3 Soit A la matrice d'un projecteur, et $\phi : \left(\begin{array}{ccc} \mathcal{M}_n(\mathbb{C}) & \longrightarrow & \mathcal{M}_n(\mathbb{C}) \\ M & \longmapsto & \frac{1}{2}\big(AM + MA\big) \end{array} \right)$.

a) Justifier l'existence de $r \in [\![0, n]\!]$ et de $P \in \mathcal{GL}_n(\mathbb{C})$ tels que $P^{-1}AP = \left(\begin{array}{c|c} I_r & O \\ \hline O & O \end{array} \right)$.

b) L'endomorphisme ϕ est-il diagonalisable ? Donner les éléments propres de ϕ.

Exercice 4 Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. On définit l'endomorphisme f de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ par $f(M) = \mathrm{tr}(A)M + \mathrm{tr}(M)A$. L'endomorphisme f est-il diagonalisable ?

Exercice 5 Soit $C \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, et $M = \left(\begin{array}{c|c} C & I_n \\ \hline I_n & I_n \end{array} \right) \in \mathcal{M}_{2n}(\mathbb{C})$.

a) Montrer que si M est diagonalisable il en est de même de C.

b) La réciproque est-elle vraie ?

Exercice 6 Soit E un $\mathbb{C}$-espace vectoriel de dimension finie, f et g deux endomorphismes non nuls, et a et b deux nombres complexes (avec $a \neq 0$) tels que $f \circ g - g \circ f = af + bg$. Le but de l'exercice est de montrer que f et g ont un vecteur propre en commun.

Pour tout $g \in \mathcal{L}(E)$, on définit $\phi_g : \mathcal{L}(E) \to \mathcal{L}(E)$ en posant $\phi_g(u) = u \circ g - g \circ u$.

Dans les quatre premières questions on suppose $b = 0$.

a) Montrer que $\mathrm{Ker}\, f$ est stable par g.

b) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\phi_g(f^n) = naf^n$.

c) Montrer qu'il existe un entier $k \geqslant 1$ tel que $f^k = 0$ (on pourra raisonner par l'absurde).

d) Montrer que l'induit de g sur $\mathrm{Ker}\, f$ possède au moins une valeur propre, et en déduire que f et g ont un vecteur propre en commun.

Dans la dernière question on suppose $b \neq 0$.

e) Montrer que f et g ont un vecteur propre en commun. **Indication** : calculer $\phi_g(h)$ avec $h = af + bg$.

Exercice 7 Soit $a \neq b$ deux nombres complexes, et $A = \begin{pmatrix} 0 & a & \cdots & a \\ b & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & a \\ b & \cdots & b & 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.

a) Montrer que $\chi_A(X) = \dfrac{1}{a-b}\Big(a(X+b)^n - b(X+a)^n\Big)$.

b) Montrer qu'en général les valeurs propres de A sont situés sur un cercle du plan complexe.

Exercice 8 Soit $u \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3)$ telle que $\mathrm{Sp}(u) = \{\lambda\}$ et $\dim \mathrm{Ker}(u - \lambda \mathrm{Id}) = 2$. Montrer l'existence d'une base (e) dans laquelle $\mathrm{Mat}_{(e)}(u) = \begin{pmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 1 \\ 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix}$.