Travaux dirigés

Espaces probabilisés

Exercice 1 Soit (A_n) une suite d'événements d'un même espace probabilisé.

a) Montrer que les ensembles suivants sont des événements :

- A = « à partir d'un certain rang tous les A_n sont réalisés » ;
- B = « il y a une infinité d'événements parmi les A_n qui sont réalisés » ;
- C = « il n'y a jamais deux événements consécutifs réalisés ».

b) On suppose les événements A_n mutuellement indépendants et $\mathbb{P}(A_n) = \dfrac{1}{2^{n+1}}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Calculer $\mathbb{P}(A)$, $\mathbb{P}(B)$ et montrer sans la calculer que $0 < \mathbb{P}(C) < 1$.

Exercice 2 Soit $(A_n)_{n\geqslant 1}$ une suite d'événements mutuellement indépendants.

a) Démontrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ on a $\mathbb{P}(A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n) \geqslant 1 - \exp\Big(-\sum\limits_{k=1}^{n} \mathbb{P}(A_k)\Big)$.

b) On suppose la série $\sum \mathbb{P}(A_n)$ divergente. Que dire de l'événement $\bigcup\limits_{n\geqslant 1} A_n$?

c) Une urne contient initialement une boule rouge et une boule noire. On effectue une succession infinie de tirages. Après chaque tirage on remet la boule tirée et on en ajoute une rouge. Quelle est la probabilité que l'on obtienne au moins une fois la boule noire ?

d) Quelle est la probabilité que la boule noire soit tirée une infinité de fois ?

Exercice 3

a) Vérifier qu'on définit bien une probabilité sur $\mathbb{N}^*$ en posant : $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \mathbb{P}(\{n\}) = \dfrac{1}{2^n}$.

Pour tout $k \in \mathbb{N}^*$ on note A_k l'événement : « n est un multiple de k ».

b) Calculer $\mathbb{P}(A_k)$ pour $k \in \mathbb{N}^*$.

c) Calculer $\mathbb{P}(A_2 \cup A_3)$.

d) On note B l'événement « n est un nombre premier ». Montrer que $\dfrac{13}{32} < \mathbb{P}(B) < \dfrac{34}{63}$.

Exercice 4

a) Une urne contient p boules rouges et q boules vertes. On tire sans remise les boules, et on s'arrête lorsqu'on a tiré toutes les boules vertes. Déterminer la probabilité d'avoir retiré toutes les boules.

b) Une urne contient n boules rouges et n boules blanches. On tire les boules deux par deux jusqu'à ce que l'urne soit vide. déterminer la probabilité de tirer à chaque étape une boule rouge et une boule blanche.

Exercice 5 Alice et Bob jouent des parties indépendantes numérotées $1, 2, \ldots$. La probabilité qu'Alice gagne est égale à p et celle que Bob gagne à $q = 1 - p$.

On note a_{2n} la probabilité qu'il y ait égalité à la date $2n$, et b_{2n} la probabilité que la première égalité ait lieu à la date $2n$.

On pose $A(x) = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_{2n} x^{2n}$ et $B(x) = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} b_{2n} x^{2n}$.

a) Exprimer a_{2n} en fonction de n.

b) Déterminer le rayon de convergence R de la série entière $A(x)$.

c) Montrer que pour tout $x \in]-R, R[$, $A(x) = \dfrac{1}{\sqrt{1 - 4pqx^2}} - 1$.

d) Établir une identité vérifiée par A et B, puis expliciter $B(x)$.

e) En admettant que B soit définie et continue en 1, déterminer la probabilité qu'il n'y ait jamais égalité.