Travaux dirigés

Dénombrement

Exercice 1 Soit E un ensemble de cardinal n, et A une partie de E à p éléments. Dénombrer les parties X de E vérifiant :

a) $A \cap X = \varnothing$;

b) $A \cup X = A$;

c) $A \cap X = A$;

d) $A \cup X = E$.

Exercice 2 Soit E un ensemble de cardinal n.

a) Déterminer le nombre de couples (A, B) de parties de E vérifiant $B \subset A$.

b) En déduire le nombre de couples (A, B) de parties de E vérifiant $A \cap B = \varnothing$.

c) En déduire le nombre de triplets (A, B, C) de parties de E deux-à-deux disjointes telles que $A \cup B \cup C = E$.

d) Généraliser la formule précédente à un nombre p de parties de E.

Exercice 3 Pour tout $n \in \mathbb{N}$ on note u_n le nombre de parties de $[\![1, n]\!]$ ne contenant pas deux entiers consécutifs. Montrer que pour tout $n \geqslant 2$, $u_n = u_{n-1} + u_{n-2}$, et en déduire l'expression de u_n.

Exercice 4 Soient E et F deux ensembles finis de cardinaux respectifs n et p. On note S_n^p le nombre de surjections de E sur F.

a) Calculer S_n^1, S_n^n et S_n^p pour $p > n$.

b) Pour $n \geqslant 3$ on suppose $p < n$ et on considère un élément a de E.

En observant qu'une surjection de E sur F réalise, ou ne réalise pas, une surjection de $E \setminus \{a\}$ sur F, établir la relation :

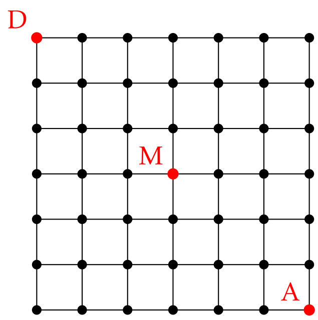
$$S_n^p = p\left(S_{n-1}^{p-1} + S_{n-1}^p\right).$$

c) En déduire que $S_n^p = (-1)^p \sum_{k=0}^{p} (-1)^k \binom{p}{k} k^n$. Quelle formule obtient-on en prenant $n = p$?

Exercice 5 Soit E un ensemble à np éléments. Déterminer le nombre de partitions de E en n parties à p éléments.

Exercice 6

On considère une grille carrée de taille $2n \times 2n$, sur laquelle on ne peut se déplacer que d'une unité à la fois, et ce uniquement de la gauche vers la droite ou de haut en bas. Combien y-a-t-il de chemin reliant le point D au point A ? Et parmi ces chemins, combien y en a-t-il qui passent par le point médian M ?



Exercice 7 **statistique de Bose-Einstein**

En mécanique quantique et en physique statistique, la *statistique de Bose-Einstein* désigne la distribution statistique de m bosons indiscernables sur les n états d'énergie d'un système à l'équilibre thermodynamique.
En d'autres termes, combien y-a-t-il de façons de placer m boules indiscernables dans n urnes discernables ?

Exercice 8

a) Combien y-a-t-il de séquences de p entiers $x_1, x_2, \dots, x_p$ tels que $1 \leqslant x_1 < x_2 < \cdots < x_p \leqslant n$?

b) Combien y-a-t-il de séquences de p entiers $x_1, x_2, \dots, x_p$ tels que $1 \leqslant x_1 \leqslant x_2 \leqslant \cdots \leqslant x_p \leqslant n$?