Travaux dirigés

Polynômes

Cette fiche est consacrée à des révisions de première année concernant les polynômes.

Exercice 1 Montrer que l'application $\phi : \mathbb{R}_n[X] \to \mathbb{R}_n[X]$ définie par $\phi(P) = P - P'$ est un automorphisme, et en déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}$ il existe un unique polynôme $P_n \in \mathbb{R}_n[X]$ tel que $P_n - P_n' = X^n$.
Exprimer ensuite P_n dans la base canonique de $\mathbb{R}_n[X]$.

Exercice 2 On pose $P = (X-a)^n(X-b)^n$. Calculer $P^{(n)}$ puis, en posant $a = b = 0$, en déduire la valeur de $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}^2$.

Exercice 3 Soit $P \in \mathbb{R}_n[X]$. Montrer que $P(X+1) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} P^{(k)}(X)$.

Exercice 4 Déterminer une condition nécessaire et suffisante portant sur n pour que $X^2 + X + 1$ divise $X^{2n} + X^n + 1$.

Exercice 5 Soit $P \in \mathbb{R}[X]$ un polynôme non nul vérifiant $P(X^2) = P(X-1)P(X)$.

a) Quel est le coefficient dominant de P ?

b) Montrer que si a est une racine complexe de P alors $|a| = |a+1| = 1$.

c) En déduire les polynômes P solutions.

Exercice 6 Déterminer une condition nécessaire et suffisante pour que $P = (X-1)^n - X^n + 1$ ait une racine multiple.

Exercice 7 Soit $P = \displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} X^k$. Factoriser P dans $\mathbb{C}[X]$ puis, en calculant $P(1)$, en déduire $\displaystyle\prod_{k=1}^{n-1} \sin\left(\frac{k\pi}{n}\right)$.

Exercice 8 Soit $P \in \mathbb{R}[X]$ un polynôme réel de degré $n \geqslant 2$.

a) En utilisant le théorème de Rolle, montrer que si P est scindé à racines simples, il en est de même du polynôme P′.

b) Généraliser en montrant que si P est simplement supposé scindé (mais plus à racines simples), il en est de même de P′.

Exercice 9 On pose pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x) = e^{-x^2}$.

a) Montrer qu'il existe un unique polynôme P_n tel que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f^{(n)}(x) = P_n(x)e^{-x^2}$.

b) Montrer que P_n est scindé à racines simples.