Travaux dirigés

Intégration sur un segment

Exercice 1

a) Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ une fonction continue telle que $\displaystyle\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t = 0$. Montrer que f s'annule au moins une fois sur $[a,b]$.

b) Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ une fonction continue telle que $\displaystyle\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t = 0$ et $\displaystyle\int_a^b t f(t)\,\mathrm{d}t = 0$. Montrer que f s'annule au moins deux fois sur $[a,b]$.

c) Soit $n \geqslant 2$ et $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ une fonction continue telle que pour tout $k \in [\![0, n-1]\!]$, $\displaystyle\int_a^b t^k f(t)\,\mathrm{d}t = 0$. Montrer que f s'annule au moins n fois sur $[a,b]$.

Indication. Montrer que f s'annule *en changeant de signe*.

Exercice 2 Soit $k \geqslant 2$ un entier fixé. Calculer $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \cdots + \frac{1}{kn}\right)$.

Exercice 3 Soit $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ une fonction continue. Déterminer $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n^2} \sum_{1\leqslant i<j\leqslant n} f\left(\frac{i}{n}\right) f\left(\frac{j}{n}\right)$.

Exercice 4 Pour $x \in \mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}$, calculer $\displaystyle\int_0^{2\pi} \ln|x - \mathrm{e}^{it}|\,\mathrm{d}t$ en utilisant une somme de Riemann.

Exercice 5 Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ une fonction continue.

a) Soit $g : x \mapsto x \displaystyle\int_a^x (1-t) f(t)\,\mathrm{d}t + (1-x)\int_x^b t f(t)\,\mathrm{d}t$. Justifier que g est de classe $\mathscr{C}^2$ et que $g'' = f$.

b) Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $h_n : x \mapsto \displaystyle\int_a^x \frac{(x-t)^{n-1}}{(n-1)!} f(t)\,\mathrm{d}t$. Justifier que h_n est de classe $\mathscr{C}^n$ et que $h_n^{(n)} = f$.

Exercice 6 Soient $f : [a,b] \to \mathbb{R}_+$ et $g : [a,b] \to \mathbb{R}$ deux fonctions continues. On suppose que f ne s'annule pas sur $]a,b[$.

a) Démontrer qu'il existe $c \in \,]a,b[$ tel que $\displaystyle\int_a^b f(t) g(t)\,\mathrm{d}t = g(c) \int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$.

b) **Application**. Soit g une fonction continue au voisinage de 0. Déterminer la limite $\displaystyle\lim_{x\to 0} \int_0^x t g(t)\,\mathrm{d}t$.

Exercice 7 Pour $0 < a < b$ déterminer $\displaystyle\lim_{x\to 0^+} \int_{ax}^{bx} \frac{1-\cos(t)}{t^3}\,\mathrm{d}t$.

Exercice 8 Soit $\mathrm{I} = \displaystyle\int_0^{\pi} \frac{t \sin t}{1 + (\cos t)^2}\,\mathrm{d}t$. Effectuer dans I le changement de variable $u = \pi - t$ et en déduire la valeur de I.