Travaux dirigés

Intégration sur un intervalle

Exercice 1 Déterminer en fonction de $\alpha > 0$ et $\beta > 0$ la nature des intégrales suivantes :

$$\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{t^\alpha(1+t^\beta)} \qquad \int_0^1 \frac{\ln t}{t^\alpha}\,\mathrm{d}t \qquad \int_0^1 \frac{\ln t}{(1-t)^\alpha}\,\mathrm{d}t \qquad \int_0^{+\infty} \frac{1}{t^\alpha}\ln(t+\mathrm{e}^{-\beta t})\,\mathrm{d}t$$

Exercice 2 Justifier la convergence puis calculer les intégrales $\displaystyle\int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{(1+t^2)\sqrt{1-t^2}}$ et $\displaystyle\int_0^1 \frac{\ln t}{\sqrt{1-t}}\,\mathrm{d}t$.

Exercice 3 Trouver un équivalent simple de $u_n = \displaystyle\sum_{k=1}^n \frac{\mathrm{e}^{-n/k}}{k^2}$.

Exercice 4 Soit $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ une fonction continue par morceaux et décroissante, telle que l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t$ converge.

Démontrer que l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} t\big(f(t)-f(t+1)\big)\mathrm{d}t$ converge et la calculer.

Exercice 5 Le but de cet exercice est de calculer la valeur de l'intégrale de Gauss $\mathrm{G} = \displaystyle\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-t^2}\,\mathrm{d}t$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$ on pose $\mathrm{I}_n = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin t)^n\,\mathrm{d}t$, $\mathrm{J}_n = \displaystyle\int_0^1 (1-t^2)^n\,\mathrm{d}t$ et pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\mathrm{K}_n = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{(1+t^2)^n}$.

a) Prouver que pour tout $n \geqslant 2$ on a $n\mathrm{I}_n = (n-1)\mathrm{I}_{n-2}$ et en déduire que pour tout $n \geqslant 1$, $n\mathrm{I}_n\mathrm{I}_{n-1} = \dfrac{\pi}{2}$.

b) Justifier que $\mathrm{I}_n \sim \mathrm{I}_{n-1}$ et en déduire que $\mathrm{I}_n \sim \sqrt{\dfrac{\pi}{2n}}$.

c) À l'aide de changements de variables adéquats, exprimer les intégrales J_n et K_n en fonction de la suite (I_n).

d) Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $1-x^2 \leqslant \mathrm{e}^{-x^2} \leqslant \dfrac{1}{1+x^2}$ et en déduire que pour tout $n \geqslant 2$, $\mathrm{I}_{2n+1} \leqslant \dfrac{\mathrm{G}}{\sqrt{n}} \leqslant \mathrm{I}_{2n-2}$.

e) En déduire la valeur de l'intégrale de Gauss G.

Exercice 6 Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction continue par morceaux et T-périodique.

On pose $\lambda = \dfrac{1}{\mathrm{T}}\displaystyle\int_0^{\mathrm{T}} f(t)\,\mathrm{d}t$ et $\mathrm{F} : x \mapsto \displaystyle\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t - \lambda x$.

a) Montrer que la fonction F est T-périodique.

b) Soit $\alpha > 0$. Démontrer la convergence puis l'égalité des intégrales $\mathrm{I} = \displaystyle\int_{\mathrm{T}}^{+\infty} \frac{f(t)-\lambda}{t^\alpha}\,\mathrm{d}t$ et $\mathrm{J} = \alpha\displaystyle\int_{\mathrm{T}}^{+\infty} \frac{\mathrm{F}(t)}{t^{\alpha+1}}\,\mathrm{d}t$.

Exercice 7 Soit $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ une fonction continue par morceaux, décroissante et intégrable. Montrer que pour tout $h > 0$ la série $\sum hf(nh)$ converge, puis calculer la limite $\displaystyle\lim_{h\to 0^+} \sum_{n=1}^{+\infty} hf(nh)$.