

Endomorphismes d'un espace euclidien

Isométries vectorielles

Exercice 1 Soit E un espace euclidien et $u \in \mathcal{L}(E)$ conservant l'orthogonalité :

$$\forall (x, y) \in E^2, \quad \langle x | y \rangle = 0 \implies \langle u(x) | u(y) \rangle = 0.$$

Montrer qu'il existe un scalaire λ et une isométrie vectorielle $v \in \mathcal{O}(E)$ tel que $u = \lambda v$.

Exercice 2 On considère l'espace vectoriel $E = \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ muni du produit scalaire canonique $\langle M | N \rangle = \text{tr}(M^T N)$. Soit $A \in E$, et $u \in \mathcal{L}(E)$ défini par $u(M) = AM$. À quelle condition u est-il une isométrie vectorielle de E ?

Exercice 3 Soient (e) et (f) deux bases orthonormées d'un même espace euclidien E de dimension n , et $u \in \mathcal{L}(E)$. Montrer que la quantité $\alpha = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \langle f_i | u(e_j) \rangle^2$ ne dépend pas de (e) et (f) .

Exercice 4 Soit E un espace euclidien. On considère des vecteurs u_1, \dots, u_n et v_1, \dots, v_n de E tels que pour tout $(i, j) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2$, $\langle u_i | u_j \rangle = \langle v_i | v_j \rangle$, et le but de l'exercice est de montrer l'existence d'une isométrie vectorielle $f \in \mathcal{O}(E)$ telle que pour tout $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$, $f(u_i) = v_i$.

- Traiter l'exercice dans le cas où (u) est une base de E .
- Traiter l'exercice dans le cas où (u) est une famille génératrice de E .
- Traiter l'exercice dans le cas général.

Endomorphismes symétriques

Exercice 5 Soit u un endomorphisme symétrique d'un espace euclidien. Montrer que si p est impair il existe un unique endomorphisme symétrique v tel que $v^p = u$.

Exercice 6 Soit A une matrice symétrique dont toutes les valeurs propres sont strictement positives.

- Montrer que $\langle X | Y \rangle = X^T A Y$ définit un produit scalaire sur \mathbb{R}^n .
- En déduire l'existence d'une matrice triangulaire supérieure M telle que $A = M^T M$.
- En déduire que $\det A \leq \prod_{k=1}^n a_{kk}$. Dans quel cas a-t-on égalité?

Exercice 7 Soit E un espace euclidien de dimension n et $u \in \mathcal{S}(E)$ un endomorphisme symétrique tel que $\text{tr } u = 0$.

- Montrer l'existence d'un vecteur non nul $x \in E$ tel que $\langle u(x) | x \rangle = 0$.
- En déduire l'existence d'une base orthonormée (e) telle que pour tout $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$, $\langle u(e_i) | e_i \rangle = 0$. Que dire de la matrice associée à u dans la base (e) ?