Travaux dirigés

Espaces euclidiens

Exercice 1 Soient $x_1,\dots,x_n$ des vecteurs d'un espace préhilbertien E. On suppose qu'il existe un réel $M \geqslant 0$ tel que pour tout $(\epsilon_1,\dots,\epsilon_n) \in \{-1,1\}^n$, $\left\|\sum_{k=1}^{n} \epsilon_k x_k\right\| \leqslant M$. Le but de l'exercice est de prouver que $\sum_{k=1}^{n} \|x_k\|^2 \leqslant M^2$.
Traiter les cas $n = 1$ et $n = 2$ puis, en raisonnant par récurrence, le cas général.

Exercice 2 On munit $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ du produit scalaire canonique $\langle M \mid N\rangle = \operatorname{tr}(M^T N)$, on pose $H = \left\{M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \;\middle|\; \operatorname{tr}(M) = 0\right\}$, et on note J la matrice dont tous les coefficients sont égaux à 1. Calculer la distance de J à H.

Exercice 3 On munit $E = \mathbb{R}_n[X]$ du produit scalaire $\langle P \mid Q\rangle = \int_0^{+\infty} P(t)Q(t)e^{-t}\,dt$, et on note $(P_0,\dots,P_n)$ la base orthonormée obtenue en appliquant le procédé de Gram-Schmidt à la base canonique $(1, X,\dots,X^n)$.

a) Calculer $P_k(0)^2$ pour tout $k \in [\![0,n]\!]$ (on pourra utiliser une intégration par parties).

b) On note $H = \left\{P \in E \;\middle|\; P(0) = 0\right\}$. Quelle est la dimension de H ? Déterminer une base de $H^\perp$ à l'aide des $P_0,\dots,P_n$.

c) Déterminer $\inf\left\{\int_0^{+\infty} e^{-t}(1 - a_1 t - \cdots - a_n t^n)^2\,dt \;\middle|\; (a_1,\dots,a_n) \in \mathbb{R}^n\right\}$.

Exercice 4 Soit E un espace euclidien de dimension n. Le but de l'exercice est de prouver l'existence d'une base $(u_1,\dots,u_n)$ de E telle que pour tout $k \in [\![1,n]\!]$, $\|u_k\| = 1$ et $i \neq j \Longrightarrow \|u_i - u_j\| = 1$.

a) Montrer que ces conditions sont équivalentes à : $\forall k \in [\![1,n]\!]$, $\|u_k\| = 1$ et $i \neq j \Longrightarrow \langle u_i \mid u_j\rangle = 1/2$.

b) Conclure en raisonnant par récurrence.

Exercice 5 Soit E un espace euclidien de dimension n. Une famille de p vecteurs $(x_1,\dots,x_p)$ est dite *obtusangle* lorsque $i \neq j \Longrightarrow \langle x_i \mid x_j\rangle < 0$. En raisonnant par récurrence sur n, montrer que $p \leqslant n+1$.

Exercice 6 Polynômes de Legendre

Pour tout $n \in \mathbb{N}$ on note Q_n le polynôme $\frac{1}{2^n n!}\left((X^2-1)^n\right)^{(n)}$.

a) Exprimer le degré et le coefficient dominant de Q_n, et déterminer les valeurs de $Q_n(1)$ et $Q_n(-1)$.

b) On pose, pour $(P,Q) \in \mathbb{R}[X]^2$, $\langle P \mid Q\rangle = \int_{-1}^{1} P(t)Q(t)\,dt$. Vérifier qu'il s'agit d'un produit scalaire puis que pour tout $n \geqslant 1$, Q_n est orthogonal à $\mathbb{R}_{n-1}[X]$.

c) Calculer $\|Q_n\|$.

d) Exprimer à l'aide de la famille (Q_n) la famille obtenue lorsqu'on applique la procédé d'orthonormalisation de Gram-Schmidt à la base canonique de $\mathbb{R}[X]$.