Travaux dirigés

Équations différentielles

Équations différentielles linéaires du premier ordre

Exercice 1 Résoudre sur un intervalle adéquat l'équation différentielle suivante : $(\sin t)^3 x' - 2(\cos t)x = 0$. Quelle est la dimension de l'espace des solutions définies sur $\mathbb{R}$?

Exercice 2

a) Résoudre l'équation $t^2 x' + x = t^2$ sur l'intervalle $]0, +\infty[$. On exprimera les solutions à l'aide de l'application $t \mapsto \int_0^t \mathrm{e}^{-1/u}\,\mathrm{d}u$, après avoir justifié la convergence de cette intégrale.

b) Montrer que l'équation admet une unique solution ayant une limite finie en 0. Quelle est cette limite ?

Exercice 3 Soit $\mathrm{E} = \mathscr{C}^0(\mathbb{R}_+, \mathbb{R})$ et a et b deux réels tels que $a > 0$.

a) Montrer que pour tout $f \in \mathrm{E}$ il existe un unique $g \in \mathscr{C}^1(\mathbb{R}_+, \mathbb{R})$ tel que $g' + ag = f$ et $g(0) = b$.

b) Montrer que si f est intégrable sur $\mathbb{R}_+$ il en est de même de g. Trouver dans ce cas une relation entre $\int_0^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t$ et $\int_0^{+\infty} g(t)\,\mathrm{d}t$.

Exercice 4 Soit $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction développable en série entière, de rayon de convergence R. Montrer que l'équation différentielle $tx' + x = g(t)$ admet une unique solution développable en série entière, avec un rayon de convergence $\mathrm{R}' \geqslant \mathrm{R}$.

Exercice 5 Soient a et b deux fonctions continues de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, et y et z solutions de :

$$y(0) = z(0) \qquad y' = a(t)y + b(t) \qquad z' \leqslant a(t)z + b(t).$$

Démontrer que pour tout $t \geqslant 0$ on a $y(t) \geqslant z(t)$.

Systèmes différentiels

Exercice 6 Résoudre les systèmes différentiels suivants :

$$\begin{cases} x' = 2x + y + z \\ y' = x - y - z \\ z' = -x + 2y + 2z \end{cases} \qquad \begin{cases} x' = 2y + 2z \\ y' = -x + 2y + 2z \\ z' = -x + y + 3z \end{cases} \qquad \begin{cases} x' = y + z \\ y' = -x + 2y + z \\ z' = x + z \end{cases}$$

Exercice 7 Soit $\mathrm{A} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ vérifiant $\mathrm{A}^2 = -\mathrm{I}_n$. Résoudre le système différentiel $\mathrm{X}' = \mathrm{AX}$; on exprimera les solutions en fonction de $\mathrm{X}(0)$ et $\mathrm{AX}(0)$.

Équations différentielles linéaires du second ordre

Exercice 8 Résoudre l'équation différentielle : $x(1 - 2\ln x)y'' + (1 + 2\ln x)y' - \dfrac{4}{x}y = 0$. On cherchera une solution de la forme $y = x^\alpha$.

Exercice 9 Chercher une solution développable en série entière de l'équation : $xy'' + 2y' - xy = 0$ puis résoudre complètement cette équation.

Exercice 10 Intégrer les équations différentielles suivantes sur des intervalles adéquats :

$$y'' - 4y' + 4y = 2(x-2)\,\mathrm{e}^x \qquad\qquad y'' - y' - \mathrm{e}^{2x}\,y = e^{3x} \quad (\text{poser } t = \mathrm{e}^x)$$

$$x^2y'' - 2xy' + 2y = x \quad (\text{poser } t = \ln x)$$

Exercice 11 Soit $\omega \in \mathbb{R}_+^*$; on s'intéresse à l'équation différentielle $x'' + \omega^2 x = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\cos(nt)}{n^2}$.

a) On suppose que $\omega \notin \mathbb{N}^*$. Résoudre l'équation différentielle puis démontrer que toutes les solutions sont bornées.

b) On suppose que $\omega = p \in \mathbb{N}^*$. Résoudre l'équation différentielle ; les solutions sont-elles encore bornées ?

Exercice 12 Soit $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ une fonction continue intégrable. On considère l'équation différentielle $y'' + f(t)y = 0$.

a) Soit y une solution bornée de l'équation. Montrer que y' tend vers 0 en $+\infty$.

b) Soient y_1 et y_2 deux solutions. Montrer que leur wronskien $w(t) = \begin{vmatrix} y_1(t) & y_2(t) \\ y_1'(t) & y_2'(t) \end{vmatrix}$ est constant.

c) En déduire que l'équation admet une solution non bornée.