Travaux dirigés

Intégrale de Dirichlet

On considère la fonction $f : [0,+\infty[\to \mathbb{R}$ définie par $f(0) = 1$ et pour tout $x > 0$, $f(x) = \dfrac{\sin x}{x}$. Nous avons démontré dans le cours que l'intégrale de Dirichlet $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t}\,\mathrm{d}t$ est une intégrale semi-convergente, autrement dit que cette intégrale converge sans que la fonction f soit intégrable sur $[0,+\infty[$. Le but de ce problème est d'en calculer la valeur.

Question 1. On définit la fonction $\phi : [0,+\infty[\to \mathbb{R}$ par la relation : $\forall s \geqslant 0$, $\phi(s) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-sx} f(x)\,\mathrm{d}x$.

a) Montrer que ϕ est bien définie sur $[0,+\infty[$.

b) Soit $a > 0$. Montrer que ϕ est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $[a,+\infty[$. En déduire que ϕ est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $]0,+\infty[$, et calculer sa dérivée ϕ'.

c) Calculer la limite $\displaystyle\lim_{s\to+\infty} \phi(s)$, et en déduire la valeur de $\phi(s)$ pour $s > 0$.

Question 2. Soit $g : [0,+\infty[\to \mathbb{R}$ une fonction continue telle que :

(i) $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} g(x) = \alpha$ existe dans $\mathbb{R}$;

(ii) la fonction $x \mapsto \mathrm{e}^{-sx}|g(x)|$ est intégrable pour tout $s > 0$.

Pour tout $s > 0$ on pose $\gamma(s) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-sx} g(x)\,\mathrm{d}x$ et $\delta(s) = s\gamma(s) - \alpha$.

a) Montrer que $\delta(s) = s\displaystyle\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-sx}\big(g(x) - \alpha\big)\,\mathrm{d}x$.

b) Soient $\epsilon > 0$ et $\mathrm{A} > 0$ tels que $|g(x) - \alpha| \leqslant \epsilon$ pour tout $x \geqslant \mathrm{A}$.

Établir que pour tout $s > 0$, on a : $|\delta(s)| \leqslant \epsilon + s\displaystyle\int_0^{\mathrm{A}} |g(x) - \alpha|\,\mathrm{d}x$.

c) En déduire la valeur de la limite $\displaystyle\lim_{s\to 0} s\gamma(s)$.

Question 3. On définit la fonction $\mathrm{F} : [0,+\infty[\to \mathbb{R}$ par : $\forall x \geqslant 0$, $\mathrm{F}(x) = \displaystyle\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t$.

a) Montrer que pour tout $s > 0$ on a :

$$s\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-sx}\,\mathrm{F}(x)\,\mathrm{d}x = \int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-sx} f(x)\,\mathrm{d}x.$$

b) En déduire la valeur de $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t}\,\mathrm{d}t$.

Question 4. On pose, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\mathrm{I}(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin(xt)}{t}\,\mathrm{d}t$ et $\mathrm{C}(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t}\cos(xt)\,\mathrm{d}t$.
Établir l'existence de ces intégrales et calculer $\mathrm{I}(x)$ et $\mathrm{C}(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.

Question 5.

a) Montrer que pour tout $x > 0$ on a :

$$\int_x^{+\infty} \frac{\sin t}{t}\,\mathrm{d}t = \frac{\cos x}{x} + \frac{\sin x}{x^2} + \rho(x) \qquad \text{avec} \qquad |\rho(x)| \leqslant \frac{1}{x^2}.$$

b) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ on a :

$$\mathrm{F}(x) = \frac{\pi}{2} + \sum_{k=1}^{n} \frac{(k-1)!}{x^k}\sin\Big(x - \frac{k\pi}{2}\Big) + \mathrm{R}_n(x) \qquad \text{avec} \quad |\mathrm{R}_n(x)| \leqslant \frac{(n-1)!}{x^n}.$$

Question 6. Pour tout $x > 0$ fixé, et pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ on pose $v_n = \dfrac{(n-1)!}{x^n}$.

a) Étudier les variations de la suite $(v_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$. Quelle est la limite de cette suite ?

b) Déduire de ce qui précède une valeur approchée de $F(50)$ à 10^{-4} près.

c) Pourrait-on utiliser la même méthode pour déterminer une valeur approchée à 10^{-4} près de $F(1)$?