Travaux dirigés

Calcul différentiel

Équations aux dérivées partielles

Exercice 1 Résoudre sur $\mathbb{R}^2$ l'équation aux dérivées partielles $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y) - 3\dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 0$ en posant $\begin{cases} u = 2x+y \\ v = 3x+y \end{cases}$.

Exercice 2 Résoudre sur $\mathcal{U} = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; x > y\right\}$ l'équation $x\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y) - y\dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y) = (x-y)f(x,y)$ en posant $\begin{cases} u = x+y \\ v = xy \end{cases}$.

Exercice 3 Résoudre sur $\mathcal{U} = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; x > 0\right\}$ l'équation $y\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y) - x\dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 2f(x,y)$ à l'aide des coordonnées polaires.

Exercice 4 Résoudre sur $\mathbb{R}^2$ l'équation $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) - \dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y) = 0$ en posant $\begin{cases} u = x+y \\ v = x-y \end{cases}$.

Exercice 5 Résoudre sur un ouvert adéquat l'équation $x^2\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) - y^2\dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y) = 0$ en posant $\begin{cases} u = xy \\ v = x/y \end{cases}$.

Exercice 6 On appelle *laplacien* de f la quantité $\Delta f(x,y) = \dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) + \dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y)$. Calculer-le en coordonnées polaires. Quels sont les fonctions *harmoniques* (c'est-à-dire vérifiant $\Delta f = 0$) et *isotropes* (ne dépendant pas de l'angle θ) ?

Étude des extremums d'une fonction

Exercice 7

a) Pour un point $\mathrm{A} \in \mathbb{R}^2$ fixé on note $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ la fonction définie par $f(\mathrm{M}) = \|\overrightarrow{\mathrm{AM}}\|^2$ (avec la norme euclidienne). Calculer le gradient de f en un point M du plan.

b) Soient A, B et C trois points non alignés du plan. Trouver le point M réalisant le minimum de la fonction $g : \mathrm{M} \mapsto \|\overrightarrow{\mathrm{AM}}\|^2 + \|\overrightarrow{\mathrm{BM}}\|^2 + \|\overrightarrow{\mathrm{CM}}\|^2$.

c) Même questions avec $f : \mathrm{M} \mapsto \|\overrightarrow{\mathrm{AM}}\|$ et $g : \mathrm{M} \mapsto \|\overrightarrow{\mathrm{AM}}\| + \|\overrightarrow{\mathrm{BM}}\| + \|\overrightarrow{\mathrm{CM}}\|$.