Travaux dirigés

Algèbre linéaire

Exercice 1 Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie, et $F_1, \dots, F_n$ des sous-espaces vectoriels de E tels que $F_1 + F_2 + \cdots + F_n = E$. Montrer qu'il existe des sous-espaces vectoriels $G_k \subset F_k$ $(1 \leqslant k \leqslant n)$ tel que $G_1 \oplus G_2 \oplus \cdots \oplus G_n = E$.

Exercice 2 Soit E un espace vectoriel, et $H_1, \dots, H_n$ des sous-espaces vectoriels de E tels que $E = H_1 \oplus H_2 \oplus \cdots \oplus H_n$. Pour tout $k \in [\![1, n]\!]$ on pose $\mathcal{H}_k = \left\{ u \in \mathcal{L}(E) \,\middle|\, \operatorname{Im} u \subset H_k \right\}$. Montrer que $\mathcal{H}_1 \oplus \mathcal{H}_2 \cdots \oplus \mathcal{H}_n = \mathcal{L}(E)$. On commencera par traiter le cas $n = 2$.

Exercice 3 Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et p et q deux projections vectorielles sur un même sous-espace H. Montrer que quel que soit $\lambda \in \mathbb{K}$, $u = \lambda p + (1 - \lambda) q$ est une projection vectorielle sur H.

Exercice 4 On considère deux projecteurs p_1 et p_2 tels que $p_1 \circ p_2 = 0$, et on pose $q = p_1 + p_2 - p_2 \circ p_1$. Montrer que q est un projecteur, et déterminer $\operatorname{Im} q$ et $\operatorname{Ker} q$.

Exercice 5 Soit E un espace vectoriel, et $u \in \mathcal{L}(E)$ un endomorphisme tel que pour tout $x \in E$, la famille $\big(x, u(x)\big)$ est liée. Montrer que u est une homothétie vectorielle.

Exercice 6 Soit E un espace vectoriel, $(x_1, \dots, x_n)$ une famille libre de vecteurs de E, et $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ des scalaires. On pose $y = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i x_i$ et $x'_i = x_i + y$ $(1 \leqslant i \leqslant n)$. Étudier à quelle condition la famille $(x'_1, \dots, x'_n)$ est libre.

Exercice 7 Soit E un espace vectoriel. Trouver tous les couples d'endomorphismes (f, g) tels que $f \circ g = f$ et $g \circ f = g$.

Exercice 8 Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice non nulle vérifiant $\operatorname{tr} M = 0$.

a) Montrer qu'il existe $X_1 \in \mathbb{R}^n$ tel que MX_1 ne soit pas colinéaire à X_1.

b) En déduire que M est semblable à une matrice $N = \begin{pmatrix} 0 & \cdots \\ \vdots & M_1 \end{pmatrix}$ où $M_1 \in \mathcal{M}_{n-1}(\mathbb{R})$ vérifie $\operatorname{tr} M_1 = 0$.

c) Montrer alors que M est semblable à une matrice à diagonale nulle.

Exercice 9 Soient E et F deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels de dimensions finies, et $u, v \in \mathcal{L}(E, F)$. Montrer que

$$\dim \operatorname{Ker}(u + v) \leqslant \dim(\operatorname{Ker} u \cap \operatorname{Ker} v) + \dim(\operatorname{Im} u \cap \operatorname{Im} v).$$

Indication. Considérer la restriction w de u à $\operatorname{Ker}(u + v)$.

Exercice 10 Soit (f_n) la suite de Fibonacci définie par $f_0 = 0$, $f_1 = 1$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $f_{n+2} = f_{n+1} + f_n$. Calculer le déterminant de la matrice $M_n \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ de coefficient général $f_{|i-j|}$.