Réduction des endomorphismes (complément pour 5/2)

Les exercices notés d'un obèle † sont de « grands classiques ».

Exercice 1 †

Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension finie, et $f, g \in \mathcal{L}(\mathrm{E})$. On suppose f inversible et $f \circ g + g \circ f = 0$.

a) On suppose g diagonalisable. Montrer que g est de rang pair.

b) On suppose $\operatorname{Im} g \oplus \operatorname{Ker} g = \mathrm{E}$. Montrer que g est de rang pair.

c) Qu'en est-il dans le cas général ?

Exercice 2 Soit $\mathrm{M} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ la matrice dont tous les coefficients sont égaux à 1, et $\mathrm{A} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $\mathrm{A}^3 = \mathrm{M}$. Montrer que $(\operatorname{tr} \mathrm{A})^3 = n$.

Exercice 3 Soit E un $\mathbb{C}$-espace vectoriel et $u \in \mathcal{L}(\mathrm{E})$ un endomorphisme. On suppose que pour tout $x \in \mathrm{E}$ il existe $(\lambda_x, \mu_x) \in \mathbb{C}^2$ tel que $u^2(x) = \lambda_x u(x) + \mu_x x$.

a) Montrer que u admet au plus deux valeurs propres.

b) Si u n'admet qu'une seule valeur propre, déterminer λ_x et μ_x.

Exercice 4 Soit $\mathrm{A} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $\mathrm{A}^3 = -\mathrm{A}$. Montrer que $\operatorname{tr}(\mathrm{A}) = 0$.

Exercice 5 †

Soit $\mathrm{A} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ une matrice diagonalisable dont toutes les valeurs propres sont de multiplicité 1, et $\mathrm{B} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ telle que $\mathrm{AB} = \mathrm{BA}$. Montrer l'existence de $(a_0, \dots, a_{n-1}) \in \mathbb{C}^n$ tel que $\mathrm{B} = \sum_{k=0}^{n-1} a_k \mathrm{A}^k$.

Exercice 6 Soit $n \in \mathbb{N} \setminus \{0, 1\}$ et $\mathrm{A} = (a_{i,j}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ la matrice définie par $a_{i,i+1} = 1$ pour tout $i \in [\![1, n-1]\!]$, $a_{n,1} = 1$, tous les autres coefficients étant nuls.

a) Montrer que $\chi_{\mathrm{A}}(x) = x^n - 1$ et que $\mathrm{A}^n = \mathrm{I}_n$.

b) Soit $p \in \mathbb{N}^*$ et $\mathrm{B} = \mathrm{I}_n + \mathrm{A} + \mathrm{A}^2 + \cdots + \mathrm{A}^{p-1}$. Montrer que B est inversible si et seulement si n et p sont premiers entre eux.

c) Soit $\mathrm{C} = \mathrm{I}_n + \mathrm{A}^2 + \mathrm{A}^4 + \cdots + \mathrm{A}^{2(p-1)}$. À quelle condition la matrice C est-elle inversible ?

Exercice 7 †

Soit E un $\mathbb{C}$-espace vectoriel de dimension n, et $u \in \mathcal{L}(\mathrm{E})$ un endomorphisme diagonalisable.
Montrer qu'il existe $a \in \mathrm{E}$ tel que $\big(a, u(a), u^2(a), \dots, u^{n-1}(a)\big)$ soit une base de E si et seulement si u possède n valeurs propres distinctes.

Exercice 8 †

Soit E un $\mathbb{C}$-espace vectoriel de dimension finie, et $u \in \mathcal{L}(\mathrm{E})$ tel que u^2 est diagonalisable. Montrer que u est diagonalisable si et seulement si $\operatorname{Ker} u = \operatorname{Ker}(u^2)$.

Exercice 9 Soit $\mathrm{A} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, et $\mathrm{B} = \left(\begin{array}{c|c} \mathrm{A} & \mathrm{A} \\ \hline \mathrm{O}_n & \mathrm{I}_n \end{array}\right) \in \mathcal{M}_{2n}(\mathbb{R})$.
Montrer que B est diagonalisable si et seulement si A est diagonalisable et 1 n'est pas valeur propre de A.