Algèbre générale (complément pour 5/2)

Les exercices notés d'un obèle † sont de « grands classiques ».

Exercice 1 Soit $a \in \mathbb{C}^*$ et $n \in \mathbb{N}$, $n \geqslant 2$. Déterminer une condition nécessaire et suffisante pour que les solutions de $\left(\frac{1+iz}{1-iz}\right)^n = a^n$ soient toutes réelles.

Exercice 2 †
Soit m et n dans $\mathbb{N}^*$. Déterminer un polynôme unitaire $P \in \mathbb{C}[X]$ de degré maximal tel que P divise $X^n - 1$ et $X^m - 1$.

Exercice 3 †
Déterminer les polynômes non constants $P \in \mathbb{C}[X]$ tels que P' divise P.

Exercice 4
a) Montrer l'existence et l'unicité d'une famille de polynômes $(B_n)_{n\geqslant 0}$ telle que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $X^n = B_n(X) - B_n(X-1)$ et $B_n(0) = 0$.
b) Vérifier que pour tout $n \geqslant 1$, $B_n'(X) = B_n'(0) + nB_{n-1}(X)$.

Exercice 5 Soient $A, B, C \in \mathbb{C}[X]$ tels que $A + B = C$. On suppose que A, B et C n'ont aucune racine commune et que l'un de ces trois polynômes est de degré strictement positif. On pose $D = A'B - AB'$.
a) Soit z une racine de ABC de multiplicité n. Montrer que z est racine de D de multiplicité au moins égale à $n-1$.
On note μ le nombre de racines distinctes de ABC.
b) Montrer que $\mu \geqslant \deg A + \deg B + \deg C - \deg D$.
c) Montrer que $\mu > \max\big(\deg A, \deg B, \deg C\big)$.

Exercice 6 †
Soit $n \in \mathbb{N}^*$, $a_0 \in \mathbb{R}_+^*$ et $a_1, \dots, a_{n-1} \in \mathbb{R}_+$. On pose $P = X^n - \sum_{k=0}^{n-1} a_k X^k$.
a) Montrer que P possède une unique racine dans $\mathbb{R}_+^*$, que l'on note ρ.
b) Soit z une racine complexe de P. Montrer que $|z| \leqslant \rho$.
c) Montrer que $\rho \leqslant \max(1, a_0 + a_1 + \cdots + a_{n-1})$.
d) Montrer que $\rho \leqslant 1 + \max_{0\leqslant k\leqslant n-1} a_k$.

Exercice 7
a) Soit $n \in \mathbb{N}$. Montrer l'existence d'un unique polynôme R_n tel que pour tout $x \in \mathbb{R}^*$ on ait $R_n\left(x + \frac{1}{x}\right) = x^n + \frac{1}{x^n}$.
b) Donner une expression de R_n (n'utilisant pas de relation de récurrence).

Exercice 8 Soit $P \in \mathbb{R}[X]$ un polynôme réel tel que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $P(x) \geqslant 0$. Montrer l'existence de deux polynômes réels A et B tels que $P = A^2 + B^2$.