Algèbre linéaire (complément pour 5/2)

Les exercices notés d'un obèle † sont de « grands classiques ».

Exercice 1 Soit E un espace vectoriel et $(v_1,\dots,v_n)\in \mathrm{E}^n$. On note V le sous-espace vectoriel engendré par les vecteurs $\left\{v_i-v_j \;\middle|\; (i,j)\in [\![1,n]\!]^2\right\}$. Montrer que $\dim \mathrm{V}\leqslant n-1$.

Exercice 2

a) Soit $(a,b,c,d)\in\mathbb{R}^4$ tel que $ad-bc\neq 0$. Déterminer l'inverse de $\begin{pmatrix} a & b\\ c & d\end{pmatrix}$.

b) Soit $\mathrm{A}\in\mathcal{GL}_2(\mathbb{R})$ une matrice inversible à coefficients dans $\mathbb{Z}$. Montrer que A^{-1} est à coefficients dans $\mathbb{Z}$ si et seulement si $\det \mathrm{A}\in\{-1,1\}$.

c) Soient A et B deux matrices de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ à coefficients dans $\mathbb{Z}$. On suppose que A, A + B, A + 2B, A + 3B, A + 4B sont inversibles et que leurs inverses sont à coefficients dans $\mathbb{Z}$. Montrer que A + 5B est inversible et que son inverse est à coefficients dans $\mathbb{Z}$.

Exercice 3 Soit E un espace vectoriel de dimension finie $n\geqslant 1$, f et g deux endomorphismes de E tels que $f^2=\mathrm{Id}$, $g^2=\mathrm{Id}$ et $f\circ g+g\circ f=0$.

a) Montrer que E est de dimension paire. On pose $\dim(\mathrm{E})=2p$.

b) Montrer qu'il existe une base de E dans laquelle les matrices de f et g sont respectivement :

$$\left(\begin{array}{c|c} \mathrm{I}_p & 0\\ \hline 0 & -\mathrm{I}_p\end{array}\right) \qquad \text{et} \qquad \left(\begin{array}{c|c} 0 & \mathrm{I}_p\\ \hline \mathrm{I}_p & 0\end{array}\right)$$

Exercice 4 Soient E, F, G et H quatre espaces vectoriels de dimensions finies, et $f\in\mathcal{L}(\mathrm{E},\mathrm{F})$, $g\in\mathcal{L}(\mathrm{F},\mathrm{G})$, $h\in\mathcal{L}(\mathrm{G},\mathrm{H})$. Montrer que :

$$\mathrm{rg}(g\circ f)+\mathrm{rg}(h\circ g)\leqslant \mathrm{rg}(g)+\mathrm{rg}(h\circ g\circ f)$$

Exercice 5 †

Calculer le déterminant et la trace de l'endomorphisme $\phi:\mathcal{M}_n(\mathbb{R})\to\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ défini par $\phi(\mathrm{M})=\mathrm{M}^{\mathrm{T}}$.

Exercice 6 Soit E un espace vectoriel de dimension finie.

a) Déterminer les endomorphismes $u\in\mathcal{L}(\mathrm{E})$ tels que pour tout $x\in\mathrm{E}$, la famille $\big(x,u(x)\big)$ est liée.

b) Déterminer les endomorphismes $u\in\mathcal{L}(\mathrm{E})$ qui laissent stable tout hyperplan de E.

Exercice 7 Soit $n\geqslant 2$ un entier et ϕ un automorphisme de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ vérifiant : $\forall(\mathrm{A},\mathrm{B})\in\mathcal{M}_n(\mathbb{C})^2$, $\phi(\mathrm{AB})=\phi(\mathrm{A})\phi(\mathrm{B})$.

a) Déterminer $\phi(\mathrm{I}_n)$.

b) Soit $i\in[\![1,n]\!]$. Montrer que $\phi(\mathrm{E}_{i,i})$ est un projecteur de rang 1.

c) Soit $u_i\in\mathrm{Im}\,\phi(\mathrm{E}_{i,1})$, $u_i\neq 0_{\mathrm{E}}$ pour $i\in[\![1,n]\!]$. Montrer que $(u_1,\dots,u_n)$ est une base de $\mathbb{C}^n$.

Exercice 8 †

Soit $(e_1,\dots,e_n)$ la base canonique de $\mathbb{R}^n$ et $u\in\mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$ définie par $\forall k\in[\![1,n-1]\!]$, $u(e_k)=e_{k+1}$ et $u(e_n)=0$. Déterminer les sous-espaces stables par u.

Exercice 9 Soit $\mathrm{M}\in\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, et $\mathcal{E}=\left\{\mathrm{P}^{-1}\mathrm{MP}\;\middle|\;\mathrm{P}\in\mathcal{GL}_n(\mathbb{R})\right\}$. Montrer que l'ensemble $\mathcal{E}$ est borné si et seulement si M est la matrice d'une homothétie.