

ALGÈBRE LINÉAIRE (COMPLÉMENT POUR 5/2)

Les exercices notés d'un obèle † sont de « grands classiques ».

Exercice 1 Soit E un espace vectoriel et $(v_1, \dots, v_n) \in E^n$. On note V le sous-espace vectoriel engendré par les vecteurs $\{v_i - v_j \mid (i, j) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2\}$. Montrer que $\dim V \leq n - 1$.

Considérons les vecteurs $v'_i = v_i - v_n$ pour $1 \leq i \leq n - 1$. On a $v'_1, \dots, v'_{n-1} \in V$ et pour tout $(i, j) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2$,

$$v_i - v_j = \begin{cases} v'_i - v'_j & \text{si } i \leq n-1 \text{ et } j \leq n-1 \\ v'_i & \text{si } j = n \\ -v'_j & \text{si } i = n \end{cases} \quad \text{donc } V = \text{Vect}(v'_1, \dots, v'_{n-1}). \text{ Il en résulte que } \dim V \leq n - 1.$$

Exercice 2

a) Soit $(a, b, c, d) \in \mathbb{R}^4$ tel que $ad - bc \neq 0$. Déterminer l'inverse de $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$.

b) Soit $A \in \mathcal{GL}_2(\mathbb{R})$ une matrice inversible à coefficients dans \mathbb{Z} . Montrer que A^{-1} est à coefficients dans \mathbb{Z} si et seulement si $\det A \in \{-1, 1\}$.

c) Soient A et B deux matrices de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ à coefficients dans \mathbb{Z} . On suppose que $A, A + B, A + 2B, A + 3B, A + 4B$ sont inversibles et que leurs inverses sont à coefficients dans \mathbb{Z} . Montrer que $A + 5B$ est inversible et que son inverse est à coefficients dans \mathbb{Z} .

a) On vérifie sans peine que $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{ad - bc} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$.

b) Si $\det A = ad - bc$ appartient à $\{-1, 1\}$, la formule précédente montre que A^{-1} est à coefficients dans \mathbb{Z} .

Réciproquement, si A et A^{-1} sont à coefficients dans \mathbb{Z} , $\det A$ et $\det A^{-1}$ sont des entiers relatifs, et $(\det A)(\det A^{-1}) = \det I_2 = 1$ donc $\det A = \det A^{-1} = \pm 1$.

c) Considérons l'application $\phi : t \mapsto \det(A + tB)$. S'agissant de matrices 2×2 , il est évident que cette application est une application polynomiale de degré inférieur ou égal à 2 et à coefficients entiers.

D'après la question précédente nous savons que $\phi(0), \phi(1), \phi(2), \phi(3), \phi(4)$ appartiennent à $\{-1, 1\}$ et il faut montrer qu'il en est de même de $\phi(5)$.

Or parmi ces cinq valeurs il y en a forcément trois qui sont égales et d'après le principe d'interpolation tout polynôme de degré inférieur ou égal à 2 qui prend trois fois la même valeur est constant. ϕ est donc constant égal à ± 1 et on a bien $\phi(5) \in \{-1, 1\}$ (ainsi que $\phi(k)$ pour tout $k \in \mathbb{Z}$).

Exercice 3 Soit E un espace vectoriel de dimension finie $n \geq 1$, f et g deux endomorphismes de E tels que $f^2 = \text{Id}$, $g^2 = \text{Id}$ et $f \circ g + g \circ f = 0$.

a) Montrer que E est de dimension paire. On pose $\dim(E) = 2p$.

b) Montrer qu'il existe une base de E dans laquelle les matrices de f et g sont respectivement :

$$\left(\begin{array}{c|c} I_p & 0 \\ \hline 0 & -I_p \end{array} \right) \quad \text{et} \quad \left(\begin{array}{c|c} 0 & I_p \\ \hline I_p & 0 \end{array} \right)$$

a) Soit $n = \dim E$. Puisque $f \circ g = -g \circ f$ on a $\det(f \circ g) = (-1)^n \det(g \circ f)$ soit $\det f \det g = (-1)^n \det g \det f$ et puisque $\det f \neq 0$ et $\det g \neq 0$, $(-1)^n = 1$: $\dim E$ est pair.

b) Puisque $f^2 = \text{Id}$, f est une symétrie et $E = \text{Ker}(f - \text{Id}) \oplus \text{Ker}(f + \text{Id})$.

De plus, puisque $f \circ g + g \circ f = 0$, on a pour tout $x \in \text{Ker}(f - \text{Id})$, $g(x) \in \text{Ker}(f + \text{Id})$ et pour tout $x \in \text{Ker}(f + \text{Id})$, $g(x) \in \text{Ker}(f - \text{Id})$. Ainsi, $g(\text{Ker}(f - \text{Id})) \subset \text{Ker}(f + \text{Id})$ et $g(\text{Ker}(f + \text{Id})) \subset \text{Ker}(f - \text{Id})$.

Puisque g est bijectif, $\dim g(\text{Ker}(f - \text{Id})) = \dim \text{Ker}(f - \text{Id})$ et $\dim g(\text{Ker}(f + \text{Id})) = \dim \text{Ker}(f - \text{Id})$ donc les inclusions précédentes prouvent que $\dim \text{Ker}(f - \text{Id}) \leq \dim \text{Ker}(f + \text{Id})$ et $\dim \text{Ker}(f + \text{Id}) \leq \dim \text{Ker}(f - \text{Id})$, d'où l'égalité $\dim \text{Ker}(f - \text{Id}) = \dim \text{Ker}(f + \text{Id})$.

Soit (e_1, \dots, e_p) une base de $\text{Ker}(f - \text{Id})$. Puisque g est un isomorphisme entre $\text{Ker}(f - \text{Id})$ et $\text{Ker}(f + \text{Id})$, $(g(e_1), \dots, g(e_p))$ est une base de $\text{Ker}(f + \text{Id})$.

On en déduit que $(e_1, \dots, e_p, g(e_1), \dots, g(e_p))$ est une base de E . La matrice de f dans cette base est bien $\left(\begin{array}{c|c} I_p & 0 \\ \hline 0 & -I_p \end{array} \right)$ et puisque $g^2 = \text{Id}$, la matrice de g dans cette base est $\left(\begin{array}{c|c} 0 & I_p \\ \hline I_p & 0 \end{array} \right)$.

Exercice 4 Soient E, F, G et H quatre espaces vectoriels de dimensions finies, et $f \in \mathcal{L}(E, F)$, $g \in \mathcal{L}(F, G)$, $h \in \mathcal{L}(G, H)$. Montrer que :

$$\text{rg}(g \circ f) + \text{rg}(h \circ g) \leq \text{rg}(g) + \text{rg}(h \circ g \circ f)$$

Commençons par établir un résultat général : si $u \in \mathcal{L}(U, V)$ et $v \in \mathcal{L}(V, W)$ on applique le théorème du rang à l'application linéaire $\left(\begin{array}{ccc} \text{Im } u & \rightarrow & W \\ x & \mapsto & v(x) \end{array} \right)$ pour obtenir : $\text{rg}(u) = \text{rg}(v \circ u) + \dim(\text{Im } u \cap \text{Ker } v)$.

Pour $u = g \circ f$ et $v = h$ on obtient : $\text{rg}(g \circ f) = \text{rg}(h \circ g \circ f) + \dim(\text{Im}(g \circ f) \cap \text{Ker } h)$.

Pour $u = g$ et $v = h$ on obtient : $\text{rg}(h \circ g) = \text{rg}(g) - \dim(\text{Im } g \cap \text{Ker } h)$.

En sommant il vient : $\text{rg}(g \circ f) + \text{rg}(h \circ g) = \text{rg}(g) + \text{rg}(h \circ g \circ f) + \dim(\text{Im}(g \circ f) \cap \text{Ker } h) - \dim(\text{Im } g \cap \text{Ker } h)$.

Mais $\text{Im}(g \circ f) \subset \text{Im } g$, donc $\dim(\text{Im}(g \circ f) \cap \text{Ker } h) \leq \dim(\text{Im } g \cap \text{Ker } h)$, ce qui donne le résultat souhaité.

Exercice 5 †

Calculer le déterminant et la trace de l'endomorphisme $\phi : \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \rightarrow \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ défini par $\phi(M) = M^T$.

On a $\phi \circ \phi = \text{Id}$ donc ϕ est une symétrie vectorielle. Ainsi, $\mathcal{M}_n(\mathbb{R}) = \text{Ker}(\phi - \text{Id}) \oplus \text{Ker}(\phi + \text{Id})$ et dans une base adaptée à cette décomposition la matrice associée à ϕ est diagonale avec des 1 et des -1 sur la diagonale, en nombre égal respectivement à $\dim(\text{Ker}(\phi - \text{Id}))$ et $\dim(\text{Ker}(\phi + \text{Id}))$.

Or $\text{Ker}(\phi - \text{Id}) = \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ (ensemble des matrices symétriques) et $\text{Ker}(\phi + \text{Id}) = \mathcal{A}_n(\mathbb{R})$ (ensemble des matrices anti-symétriques) donc $\det \phi = (-1)^{n(n-1)/2}$ et $\text{tr}(\phi) = \frac{n(n+1)}{2} - \frac{n(n-1)}{2} = n$.

Exercice 6 Soit E un espace vectoriel de dimension finie.

- Déterminer les endomorphismes $u \in \mathcal{L}(E)$ tels que pour tout $x \in E$, la famille $(x, u(x))$ est liée.
- Déterminer les endomorphismes $u \in \mathcal{L}(E)$ qui laissent stable tout hyperplan de E .

a) Soit (e) une base de E ; alors $\text{Mat}_{(e)}(u)$ est diagonale. Posons $u(e_i) = \lambda_i e_i$. Pour $i \neq j$ la famille $(e_i + e_j, u(e_i + e_j)) = (e_i + e_j, \lambda_i e_i + \lambda_j e_j)$ est liée donc $\begin{vmatrix} 1 & \lambda_i \\ 1 & \lambda_j \end{vmatrix} = 0$, soit $\lambda_i = \lambda_j$. u est bien une homothétie vectorielle.

b) Soit $x \in E \setminus \{0\}$. On complète $\{x\}$ pour former une base $(e) = (x, e_1, \dots, e_{n-1})$ de E , et on note $H_k = \text{Vect}(x, e_1, \dots, e_{k-1}, e_{k+1}, \dots, e_n)$ pour $1 \leq k \leq n-1$. Alors H_1, \dots, H_{n-1} sont des hyperplans et $H_1 \cap \dots \cap H_{n-1} = \text{Vect}(x)$.

En effet, si on décompose $y \in E$ dans la base (e) : $y = \lambda x + \sum_{k=1}^{n-1} \alpha_k e_k$ alors $y \in H_k \iff \alpha_k = 0$ donc

$$y \in H_1 \cap \dots \cap H_{n-1} \iff \alpha_1 = \dots = \alpha_{n-1} = 0 \iff y \in \text{Vect}(x).$$

Ainsi, si u laisse stable tout hyperplan alors $u(x) \in H_1 \cap \dots \cap H_{n-1} = \text{Vect}(x)$ et nous avons prouvé qu'il existe $\lambda_x \in \mathbb{K}$ tel que $u(x) = \lambda_x x$. De là on déduit par la première question que u est une homothétie.

Exercice 7 Soit $n \geq 2$ un entier et ϕ un automorphisme de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ vérifiant : $\forall (A, B) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})^2, \phi(AB) = \phi(A)\phi(B)$.

- Déterminer $\phi(I_n)$.
- Soit $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$. Montrer que $\phi(E_{i,i})$ est un projecteur de rang 1.
- Soit $u_i \in \text{Im } \phi(E_{i,1})$, $u_i \neq 0_E$ pour $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$. Montrer que (u_1, \dots, u_n) est une base de \mathbb{C}^n .

a) Puisque ϕ est un automorphisme, il existe une matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ telle que $\phi(A) = I_n$. En posant $B = I_n$ l'égalité $\phi(AB) = \phi(A)\phi(B)$ donne $\phi(I_n) = I_n$.

b) On a $E_{i,i}^2 = E_{i,i}$ donc pour $A = B = E_{i,i}$ l'égalité $\phi(AB) = \phi(A)\phi(B)$ donne $\phi(E_{i,i}) = \phi(E_{i,i})^2$, ce qui prouve que $\phi(E_{i,i})$ est un projecteur.

On a $I_n = \sum_{i=1}^n E_{i,i}$ donc $I_n = \phi(I_n) = \sum_{i=1}^n \phi(E_{i,i})$. Pour tout $x \in \mathbb{C}^n$, on a donc $x = \sum_{i=1}^n \phi(E_{i,i})(x)$, ce qui prouve que

$E = \sum_{i=1}^n \text{Im } \phi(E_{i,i})$. Nous allons maintenant montrer que cette somme est directe.

Considérons une autre décomposition de x ; celle-ci s'écrit $x = \sum_{i=1}^n \phi(E_{i,i})(x_i)$ avec x_1, \dots, x_n dans \mathbb{C}^n . Composons par $\phi(E_{j,j})$: on obtient $\phi(E_{j,j})(x) = \sum_{i=1}^n \phi(E_{j,j}E_{i,i})(x_i) = \phi(E_{j,j})(x_j)$; la décomposition est bien unique.

S'agissant d'une somme directe, on a donc $\sum_{i=1}^n \text{rg } \phi(E_{i,i}) = n$. Mais ϕ est un automorphisme donc $\phi(E_{i,i}) \neq 0$ et $\text{rg } \phi(E_{i,i}) \geq 1$. Il en résulte que pour tout $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$, $\text{rg } \phi(E_{i,i}) = 1$.

c) Montrons que la famille (u_1, \dots, u_n) est libre, en considérant la combinaison linéaire $\sum_{i=1}^n \lambda_i u_i = 0$.

Pour tout $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$, il existe $x_i \in \mathbb{C}^n$ tel que $u_i = \phi(E_{i,1})(x_i)$ donc $\sum_{i=1}^n \lambda_i \phi(E_{i,1})(x_i) = 0$. En composant par $\phi(E_{j,j})$ cette égalité se réduit à $\lambda_j \phi(E_{j,1})(x_j) = 0$, soit $\lambda_j u_j = 0$, et puisque $u_j \neq 0$ il vient $\lambda_j = 0$. La famille (u) est libre; c'est une base de \mathbb{C}^n .

Exercice 8 †

Soit (e_1, \dots, e_n) la base canonique de \mathbb{R}^n et $u \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$ définie par $\forall k \in \llbracket 1, n-1 \rrbracket, u(e_k) = e_{k+1}$ et $u(e_n) = 0$. Déterminer les sous-espaces stables par u .

Notons déjà que pour tout $k \in \llbracket 1, n \rrbracket, u^n(e_k) = 0$ donc $u^n = 0$.

Considérons H , sous-espace de \mathbb{R}^n stable par u , et notons $v = u_H \in \mathcal{L}(H)$ la restriction de u à H .

- Si $v = 0$ alors $H \subset \text{Ker } u$. Mais $\text{Ker } u = \text{Vect}(e_n)$ donc $H = \{0\}$ ou $H = \text{Vect}(e_n)$.

- Si $v \neq 0$ on a $v^n = 0$ donc on peut définir son indice de nilpotence, à savoir le plus petit entier $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$ vérifiant $v^{k-1} \neq 0$ et $v^k = 0$.

On a $H \subset \text{Ker } u^k = \text{Vect}(e_{n-k+1}, \dots, e_n)$ donc $\dim H \leq k$. Mais si on choisit $x \in H$ tel que $v^{k-1}(x) \neq 0$ un résultat classique montre que la famille $(x, v(x), \dots, v^{k-1}(x))$ est libre donc que $\dim H \geq k$. En définitive on a donc $\dim H = k$ et $H = \text{Vect}(e_{n-k+1}, \dots, e_n)$.

En conclusion, les sous-espaces stables sont les sous-espaces $\{0\}$ et $\text{Vect}(e_p, \dots, e_n)$ avec $p \in \llbracket 1, n \rrbracket$.

Exercice 9 Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, et $\mathcal{E} = \{P^{-1}MP \mid P \in \mathcal{GL}_n(\mathbb{R})\}$. Montrer que l'ensemble \mathcal{E} est borné si et seulement si M est la matrice d'une homothétie.

Notons que puisque toutes les normes sont équivalentes en dimension finie, on peut choisir de travailler avec la norme $\|M\| = \max_{i,j} |M_{i,j}|$.

Si M est la matrice d'une homothétie alors $M = \lambda I_n$ et $\mathcal{E} = \{\lambda I_n\}$ est borné puisqu'il ne contient qu'un seul élément.

Si M n'est pas la matrice d'une homothétie alors il existe $x \in \mathbb{R}^n$ tel que la famille (x, Mx) soit libre (résultat classique prouvé plus loin).

Soit alors $\alpha > 0$ et une base (e_1, \dots, e_n) de \mathbb{R}^n telle que $e_1 = x$ et $e_2 = \frac{1}{\alpha} Mx$. Notons P la matrice de passage de la

base canonique vers la base (e) . Alors $P^{-1}MP = \begin{pmatrix} 0 & & & & \\ \alpha & & & & \\ 0 & & & & \\ \vdots & & & & \\ 0 & & & & \end{pmatrix}$ et $\|P^{-1}MP\| \geq \alpha$.

Ceci étant valable pour tout $\alpha > 0$, l'ensemble \mathcal{E} n'est pas borné.

Pour finir, prouvons que si pour tout $x \in \mathbb{R}^n$ la famille (x, Mx) est liée, alors il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $M = \lambda I_n$.

L'hypothèse se traduit par : pour tout $x \in \mathbb{R}^n$, il existe $\lambda_x \in \mathbb{R}$ tel que $Mx = \lambda_x x$.

Soient x et y deux vecteurs non nuls de \mathbb{R}^n .

- Si (x, y) est liée, il existe $\alpha \in \mathbb{R}$ tel que $y = \alpha x$ et alors $\lambda_y y = My = \alpha Mx = \alpha \lambda_x x = \lambda_x y$ donc $\lambda_y = \lambda_x$.

- Si (x, y) est libre, alors $\lambda_{x+y}(x+y) = M(x+y) = Mx + My = \lambda_x x + \lambda_y y$ et par unicité de la décomposition, $\lambda_{x+y} = \lambda_x = \lambda_y$.

Dans tous les cas, $\lambda_y = \lambda_x$ donc il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que pour tout $x \in \mathbb{R}^n, Mx = \lambda x$; M est la matrice d'une homothétie.