Corrigé

Première méthode. On note X le nombre de couples dont les deux membres sont morts, et Y le nombre de veufs et veuves. On a $r = 2\mathrm{X} + \mathrm{Y}$, et le nombre de couples restant est égal à $n - \mathrm{X} - \mathrm{Y} = n - r + \mathrm{X}$ donc $\mathbb{E}(n - \mathrm{X} - \mathrm{Y}) = n - r + \mathbb{E}(\mathrm{X})$.
Numérotons maintenant les couples de 1 à n et notons Z_k la variable aléatoire égale à 1 si les deux membres du couple k sont morts, et à 0 sinon.

On a $\mathrm{X} = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \mathrm{Z}_k$ donc $\mathbb{E}(\mathrm{X}) = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \mathbb{E}(\mathrm{Z}_k)$.

Z_k suit une loi de Bernoulli donc $\mathbb{E}(\mathrm{Z}_k) = \mathbb{P}(\mathrm{Z}_k = 1) = \dfrac{\binom{2n-2}{r-2}}{\binom{2n}{r}} = \dfrac{r(r-1)}{(2n)(2n-1)}$ et ainsi $\mathbb{E}(\mathrm{X}) = \dfrac{r(r-1)}{2(2n-1)}$.

Le nombre moyen de couples restants est donc égal à

$$n - r + \frac{r(r-1)}{2(2n-1)} = \frac{(2n-r)(2n-r-1)}{2(2n-1)} = \frac{1}{2n-1}\binom{2n-r}{2}.$$

Deuxième méthode. À tout sous-ensemble A de deux personnes prises parmi les survivants on associe la variable aléatoire Z_A égale à 1 si ces deux personnes forment un couple, et à 0 sinon. On a alors $\mathbb{E}(\mathrm{X}) = \displaystyle\sum_{\mathrm{A}} \mathbb{E}(\mathrm{Z}_\mathrm{A})$.

$\mathrm{Z}_\mathrm{A} \hookrightarrow \mathscr{B}\left(\dfrac{1}{2n-1}\right)$ donc $\mathbb{E}(\mathrm{Z}_\mathrm{A}) = \dfrac{1}{2n-1}$ et ainsi $\mathbb{E}(\mathrm{X}) = \dfrac{1}{2n-1}\dbinom{2n-r}{2}$.