Corrigé

Posons $\mathrm{F} : x \mapsto \int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t$ et réalisons une intégration par parties :

$$\int_1^x \frac{\lambda - f(t)}{t}\,\mathrm{d}t = \mathrm{F}(1) - \frac{\mathrm{F}(x)}{x} + \int_1^x \frac{\lambda t - \mathrm{F}(t)}{t^2}\,\mathrm{d}t.$$

Posons $n = \lfloor x/\mathrm{T} \rfloor$. On a $n\mathrm{T} \leqslant x < (n+1)\mathrm{T}$ et

$$\mathrm{F}(x) = \sum_{k=0}^{n-1} \int_{k\mathrm{T}}^{(k+1)\mathrm{T}} f(t)\,\mathrm{d}t + \int_{n\mathrm{T}}^{x} f(t)\,\mathrm{d}t = n\int_0^{\mathrm{T}} f(u)\,\mathrm{d}u + \int_0^{x-n\mathrm{T}} f(u)\,\mathrm{d}u.$$

On a $\left|\int_0^{x-n\mathrm{T}} f(u)\,\mathrm{d}u\right| \leqslant \int_0^{\mathrm{T}} |f(u)|\,\mathrm{d}u = \mathrm{M}$ donc $\left|\frac{\mathrm{F}(x)}{x} - \frac{n}{x}\int_0^{\mathrm{T}} f(u)\,\mathrm{d}u\right| \leqslant \frac{\mathrm{M}}{x}$.
Enfin, $\frac{1}{\mathrm{T}} - \frac{1}{x} < \frac{n}{x} \leqslant \frac{1}{\mathrm{T}}$ donc $\frac{n}{x} \underset{x\to+\infty}{=} \frac{1}{\mathrm{T}} + \mathrm{O}\left(\frac{1}{x}\right)$ et

$$\frac{\mathrm{F}(x)}{x} \underset{+\infty}{=} \frac{1}{\mathrm{T}}\int_0^{\mathrm{T}} f(u)\,\mathrm{d}u + \mathrm{O}\left(\frac{1}{x}\right).$$

On en déduit que $\frac{\lambda t - \mathrm{F}(t)}{t^2} \underset{+\infty}{=} \frac{1}{t}\left(\lambda - \frac{1}{\mathrm{T}}\int_0^{\mathrm{T}} f(u)\,\mathrm{d}u\right) + \mathrm{O}\left(\frac{1}{t^2}\right)$, et ainsi $\int_1^{+\infty} \frac{\lambda - f(t)}{t}\,\mathrm{d}t$ converge si et seulement si $\lambda = \frac{1}{\mathrm{T}}\int_0^{\mathrm{T}} f(u)\,\mathrm{d}u$.