**Corrigé**

Notons $\phi : x \mapsto x\,\mathrm{e}^x$. On a $\phi'(x) = (x+1)\,\mathrm{e}^x$ donc $\phi$ est croissante sur $\mathbb{R}_+$.
Pour $t \geqslant \mathrm{e}$ on a $\phi(\ln t) = t\ln t \geqslant t = \phi(f(t))$ donc pour $t$ assez grand on a $\ln t \geqslant f(t)$.
Soit $\epsilon > 0$. On a $\phi((1-\epsilon)\ln t) = (1-\epsilon)t^{1-\epsilon}\ln t$ et par croissance comparée $t^{1-\epsilon}\ln t = \mathrm{o}(t)$. On en déduit que pour $t$ assez grand on a $\phi((1-\epsilon)\ln t) \leqslant \phi(f(t))$ donc $(1-\epsilon)\ln t \leqslant f(t)$.
En définitive on a prouvé pour tout $\epsilon > 0$ l'existence d'un rang à partir duquel $(1-\epsilon)\ln t \leqslant f(t) \leqslant \ln t$, soit $f(t) \underset{+\infty}{\sim} \ln t$.