Corrigé

a) Posons $f(x) = \cos x - x$. On a $f'(x) = -\sin x - 1 \leqslant 0$ donc f est décroissante sur $\mathbb{R}$, et même strictement décroissante sur $[0, \pi]$. Or $f(0) = 1 > 0$ et $f(\pi) = -1 - \pi < 0$ donc cette fonction possède un unique zéro $\alpha \in]0, \pi[$.

b) Supposons l'existence de $f \in \mathscr{C}^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ telle que $f \circ f = \cos$. Alors $\cos \circ f = f \circ f \circ f = f \circ \cos$ et en particulier $\cos(f(\alpha)) = f(\cos \alpha) = f(\alpha)$. Par unicité du point fixe on en déduit $f(\alpha) = \alpha$.

Mais par ailleurs on a en dérivant : $f'(\alpha) f' \circ f(\alpha) = -\sin \alpha$ donc $f'(\alpha)^2 = -\sin \alpha$. Or on a montré que $\alpha \in]0, \pi[$ donc $\sin \alpha > 0$, ce qui est absurde.