Corrigé

Notons déjà que f est croissante puisque $f' \geqslant 0$, et donc positive puisque $f(0) = 0$.

Posons $g : x \mapsto \left(\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t\right)^2 - \int_0^x f(t)^3\,\mathrm{d}t$.

Puisque f est de classe $\mathscr{C}^1$, g est de classe $\mathscr{C}^2$ d'après le théorème fondamental de l'intégration, et : $\forall x \geqslant 0$,

$$g'(x) = 2f(x)\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t - f(x)^3 = f(x)h(x) \quad \text{avec} \quad h(x) = 2\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t - f(x)^2.$$

h est de classe $\mathscr{C}^1$ et $h'(x) = 2f(x) - 2f(x)f'(x) = 2f(x)(1 - f'(x)) \geqslant 0$ donc h est croissante. Mais $h(0) = 0$ donc $h(x) \geqslant 0$ pour tout $x \geqslant 0$.

On en déduit que $g'(x) \geqslant 0$ pour tout $x \geqslant 0$. Mais $g(0) = 0$ donc $g(x) \geqslant 0$, ce qui prouve la majoration demandée.